

## CM : **STRUCTURE 2**

CYCLE LICENCE S3/S4

Marc LEYRAL  
Sylvain EBODE

**S2-C8**

## LES STRUCTURES SOUS- TENDUES ET LES MEMBRANES

*Présentation de ces archétypes structuraux*



*Stade Olympique de Munich, Allemagne, Günther Behnisch et Frei Otto, 1968 - 1972*

1. **Échauffement 10'**
2. **Rappels 10'**
3. **Cours 65'**
  - a. Les structures sous-tendues
  - b. Les réseaux de câbles
  - c. Les membranes
4. **Bilan 5'**

## Petite multiplication

On multiplie tous les nombres impairs de 1 à 2019.

Par quel chiffre se termine le résultat final ?

1. Échauffement 10'

2. Rappels 10'

3. Cours 65'

- a. Les structures sous-tendues
- b. Les réseaux de câbles
- c. Les membranes

4. Bilan 5'

## S2-C8 LES STRUCTURES SOUS-TENDUES ET LES MEMBRANES

### 1. ÉCHAUFFEMENT

# Petite multiplication

On multiplie tous les nombres impairs de 1 à 2019.

Par quel chiffre se termine le résultat final ?

**5**

Explications :

1. Il y a 5 dans la multiplication.
2. Tout nombre impair multiplié par un nombre impair est impair :  
Soit deux nombres impairs quelconques et positif. On peut les écrire sous la forme  $(2N + 1)$  et  $(2M + 1)$  où  $N$  et  $M$  sont des entiers positifs.  
Or  $(2N + 1) \times (2M + 1) = 2NM + 2N + 2M + 1 = 2(NM + N + M) + 1 \rightarrow$  impair
3. Enfin, tout nombre impair multiplié par 5 se termine lui-même par 5 :  
 $5 \times (2N + 1) = 10N + 5$

1. **Échauffement 10'**

2. **Rappels 10'**

3. **Cours 65'**

- a. Les structures sous-tendues
- b. Les réseaux de câbles
- c. Les membranes

4. **Bilan 5'**

## **S2-C8** LES STRUCTURES SOUS-TENDUES ET LES MEMBRANES

### 1. ÉCHAUFFEMENT

## Question du jour:



1. Échauffement 10'

2. Rappels 10'

3. Cours 65'

- Les structures sous-tendues
- Les réseaux de câbles
- Les membranes

4. Bilan 5'

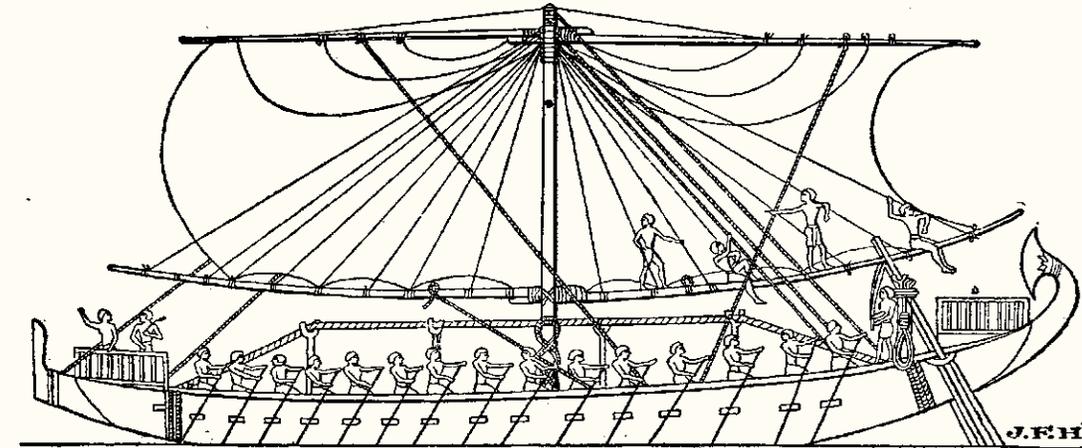
## 2. RAPPELS

### LES SYSTÈMES RÉTICULÉS

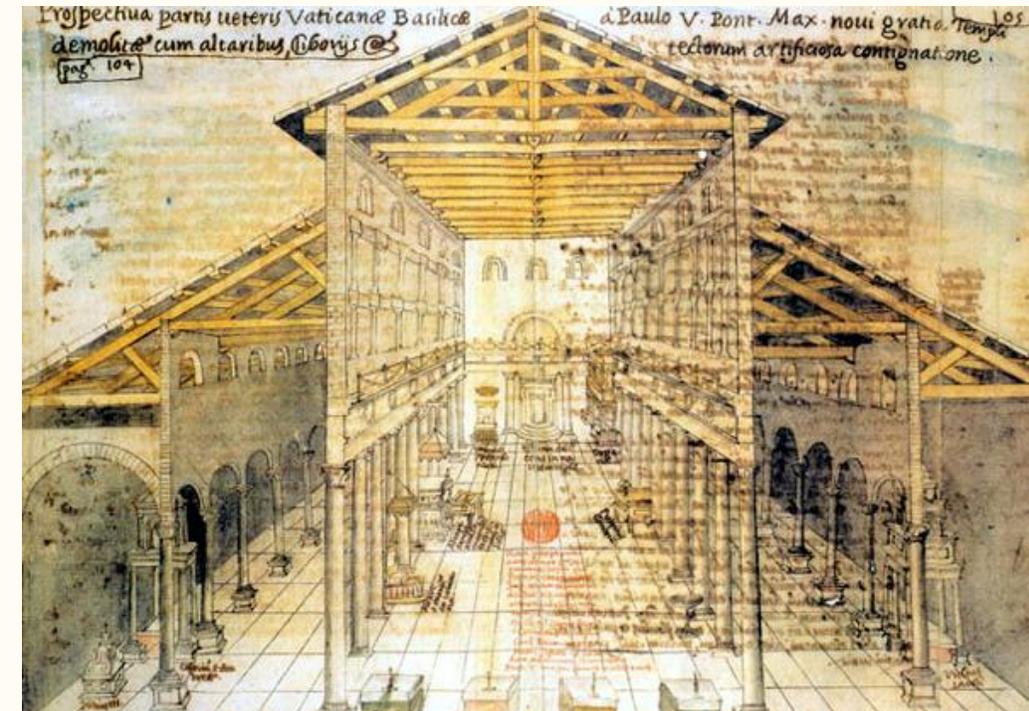
#### PETIT HISTORIQUE DES TREILLIS

**Étymologie** : treillis se dit *truss* en anglais, du vieux français *trousse* (« faisceau de choses liées ensemble »)

- Les Égyptiens en réalisaient avec des cordages sur leurs long bateaux **dès 1250 avant JC** pour ne pas qu'ils fléchissent sous le poids de l'équipage et du chargement.
- Il faudra ensuite attendre l'ère romaine pour revoir l'apparition de treillis en bois dans la réalisation des charpentes.



*Egyptian ship on the Red Sea, about 1250 B.C. [From Torr's "Ancient Ships."] Mr. Langton Cole calls attention to the rope truss in this illustration, stiffening the beam of the ship. No other such use of the truss is known until the days of Modern engineering.*



*Charpente de l'ancienne basilique Saint-Pierre de Rome, édiflée en 330 après Jésus-Christ.*

1. Échauffement 10'

2. Rappels 10'

3. Cours 65'

- a. Les structures sous-tendues
- b. Les réseaux de câbles
- c. Les membranes

4. Bilan 5'

## S2-C8 LES STRUCTURES SOUS-TENDUES ET LES MEMBRANES

Indice C

S. EBODE – M. LEYRAL

### 2. RAPPELS

#### LES SYSTÈMES RÉTICULÉS

- Un treillis est **une structure réticulée** plane ou tridimensionnelle constituée de barres
- Elle est dite réticulée lorsque tous les organes de liaisons sont des **rotules**.
- De ce fait, les barres travaillent uniquement en **compression** et en **traction**
- Pour être auto-stable, les constructions treillis doivent être constituées de **triangles**
- La forme optimum pour une répartition idéale des efforts est le treillis constitué de **triangles isocèles rectangles**



1. Échauffement 10'

2. Rappels 10'

3. Cours 65'

- a. Les structures sous-tendues
- b. Les réseaux de câbles
- c. Les membranes

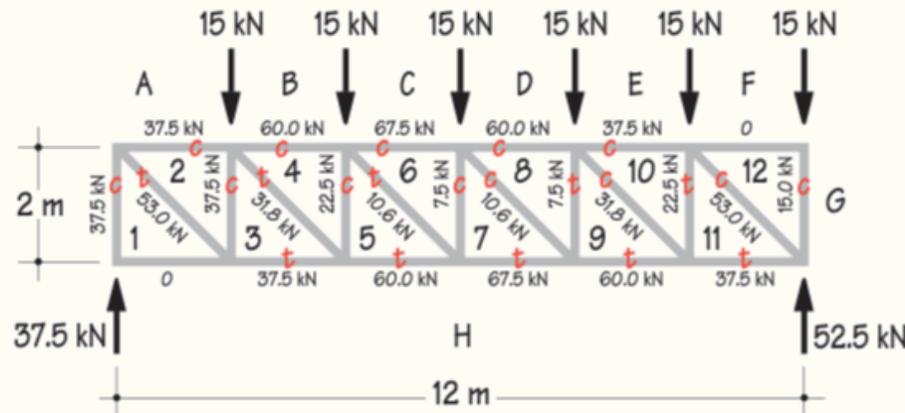
4. Bilan 5'

2. RAPPELS

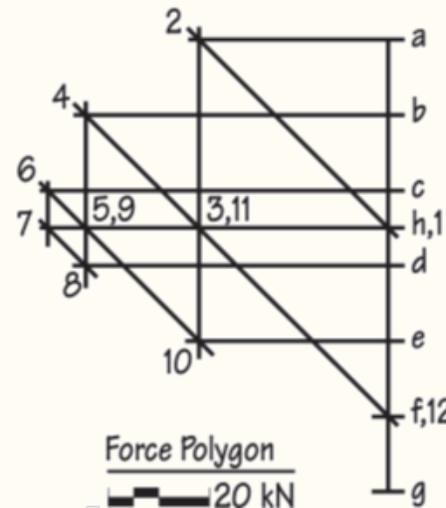
LES SYSTÈMES RÉTICULÉS

Trois méthodes pour le calcul :

1 – Méthode Graphique (Bow, Cremona)



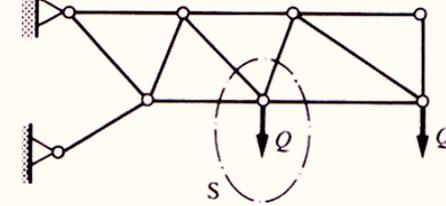
Form Diagram  
2 m



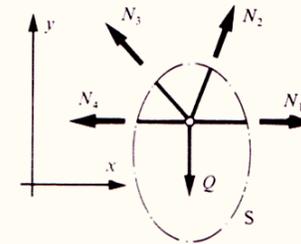
Force Polygon  
20 kN

2 – Méthode des nœuds

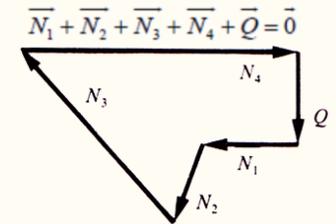
Étape 1 : isoler le nœud



Étape 2 : indiquer les forces des barres

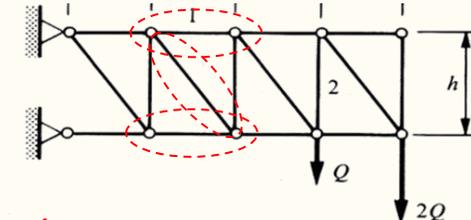


Étape 3 : trouver les forces analytiquement ou graphiquement

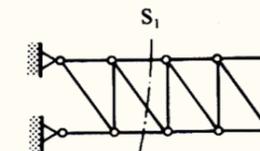


3 – Méthode de la section de Ritter

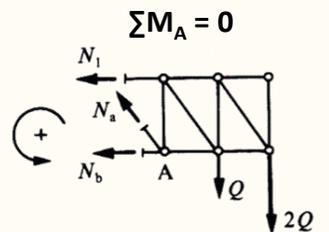
Étape 1 : Choisir les barres



Étape 2 : Dessiner la coupure



Étape 3 : trouver les forces



1. Échauffement 10'

2. Rappels 10'

3. Cours 65'

- a. Les structures sous-tendues
- b. Les réseaux de câbles
- c. Les membranes

4. Bilan 5'

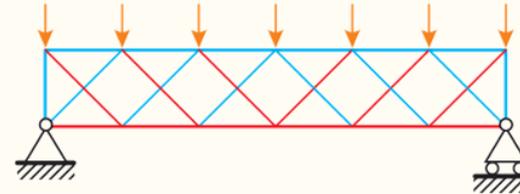
2. RAPPELS

LES DIFFÉRENTS TYPES DE TREILLIS

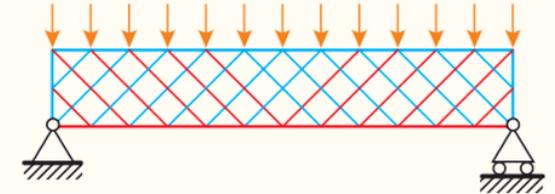
Fermes  
(nombreuses familles  
existantes)

— Compression  
— Traction

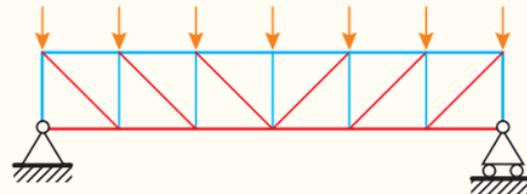
Treillis de type Town simple



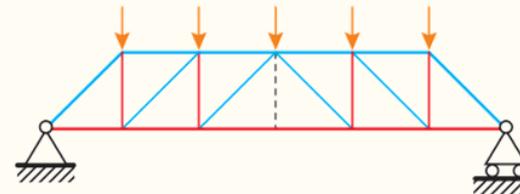
Treillis de type Town double



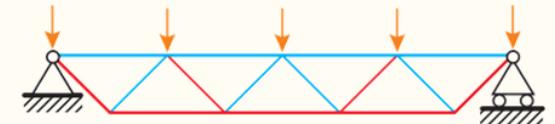
Treillis de type Pratt



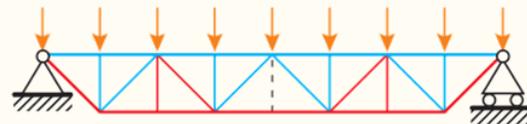
Treillis de type Howe



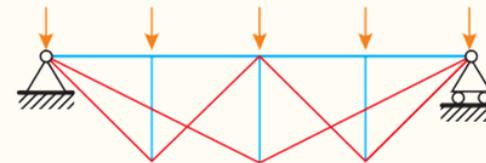
Treillis de type Warren  
sans montants



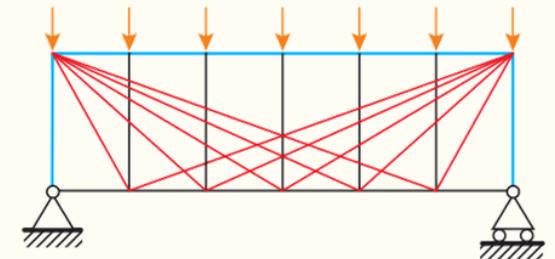
Treillis de type Warren  
avec montants



Treillis de type Fink



Treillis de type Bollman



1. Échauffement **10'**

2. **Rappels 10'**

3. Cours **65'**

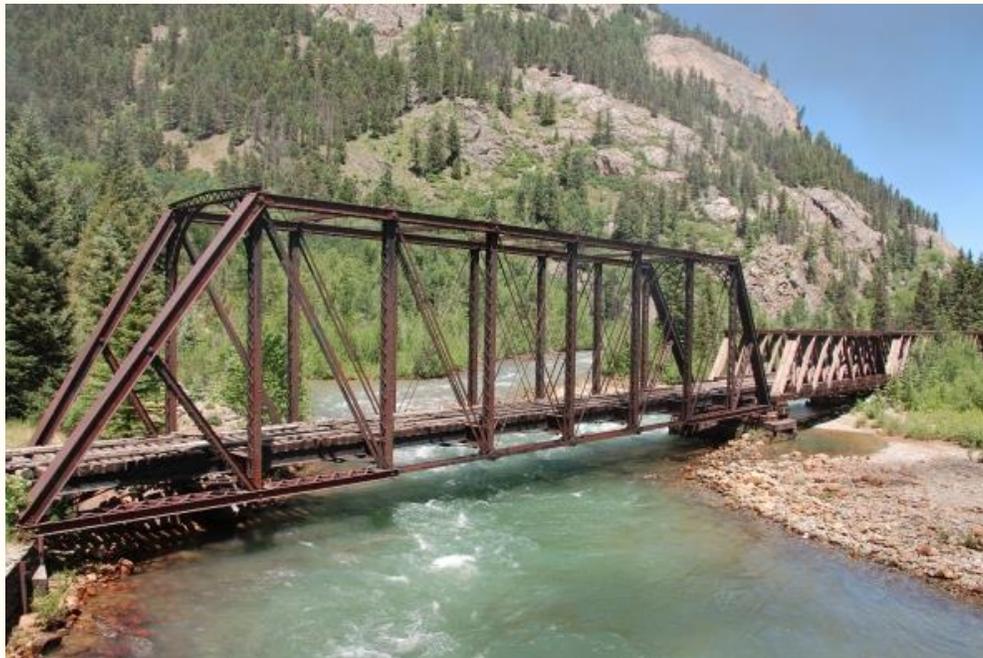
- a. Les structures sous-tendues
- b. Les réseaux de câbles
- c. Les membranes

4. Bilan **5'**

## **S2-C8** LES STRUCTURES SOUS-TENDUES ET LES MEMBRANES

### 2. RAPPELS

### LES SYSTÈMES RÉTICULÉS : DIFFÉRENTS TYPES DE TREILLIS (NON EXHAUSTIF)



1. Échauffement 10'

2. Rappels 10'

3. Cours 65'

- Les structures sous-tendues
- Les réseaux de câbles
- Les membranes

4. Bilan 5'

## S2-C8 LES STRUCTURES SOUS-TENDUES ET LES MEMBRANES

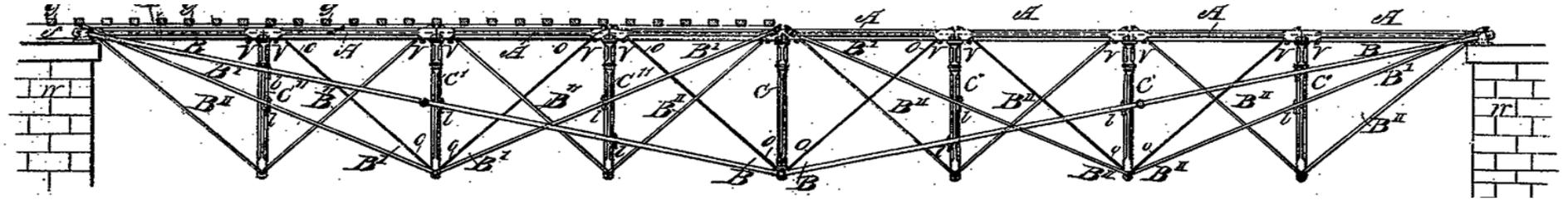
Indice C

S. EBODE – M. LEYRAL

### 3.a Les structures sous-tendues

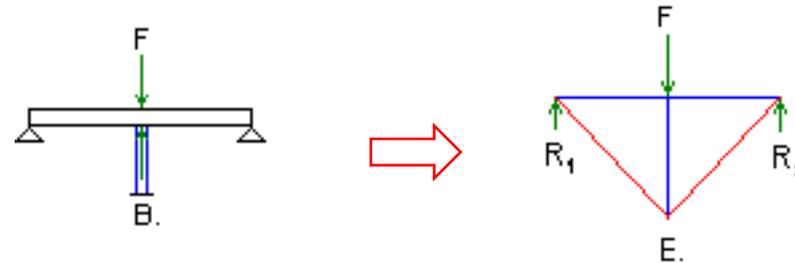
## DU TREILLIS DE TYPE FINK VERS LA POUTRE SOUS-TENDUE

Le principe des treillis **type Fink** (brevetés par Albert Fink 1854) présume les structures sous-tendues.



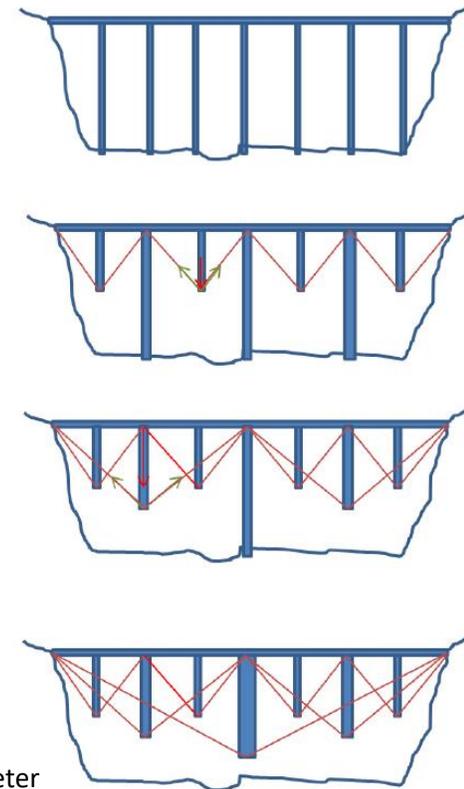
Imaginons un pont avec sept piles, difficile à construire si le ravin est profond.

1) On coupe une pile sur deux. La charge ne descend plus : pour ne pas doubler la portée, rajouter des barres en traction qui remontent la charge sur les piles voisines.



2) On coupe de nouveau une pile sur deux sur celles qui restent. On remonte de nouveau la charge avec des barres tendues.

3) On répète l'opération une dernière fois.



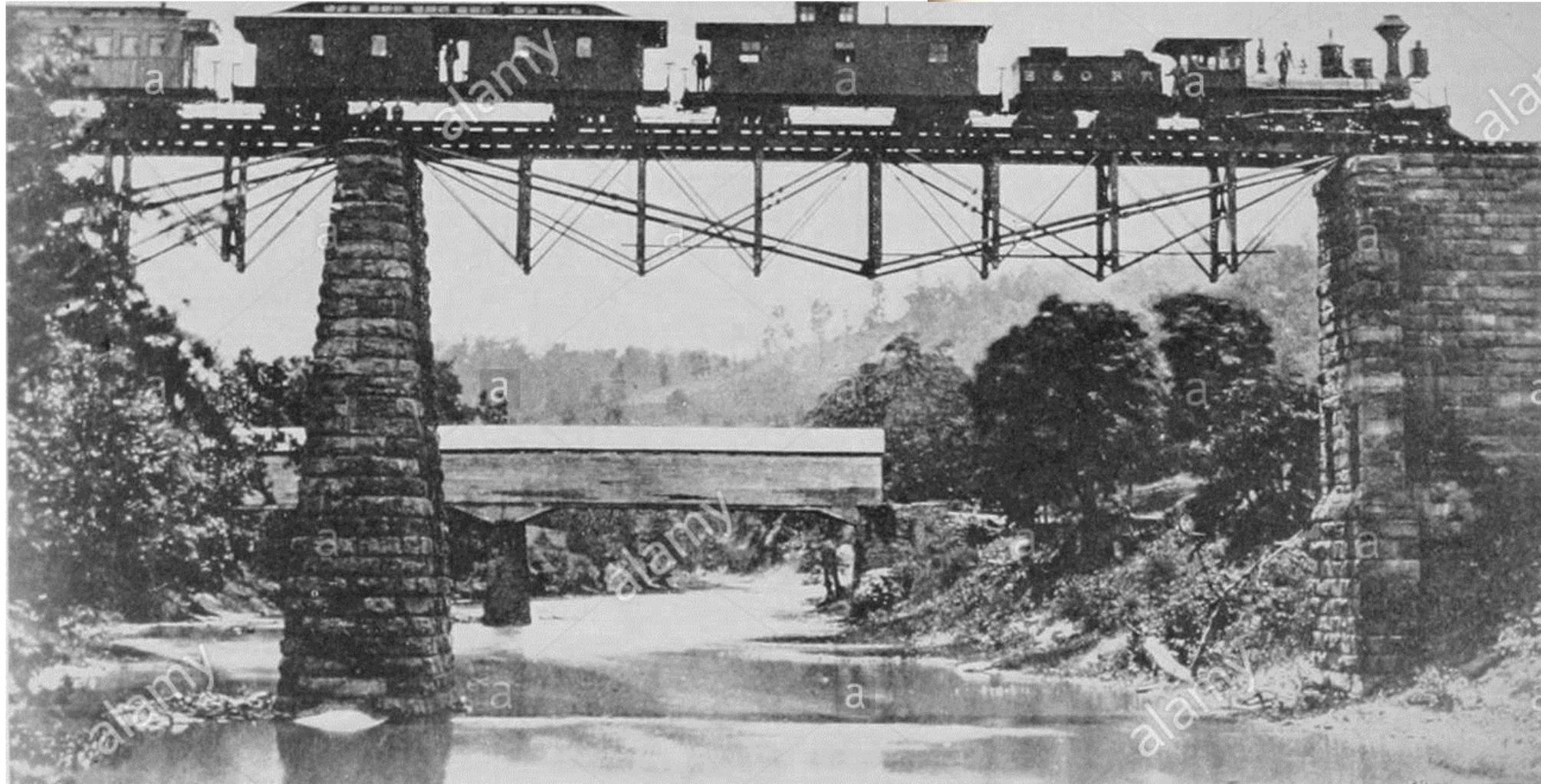
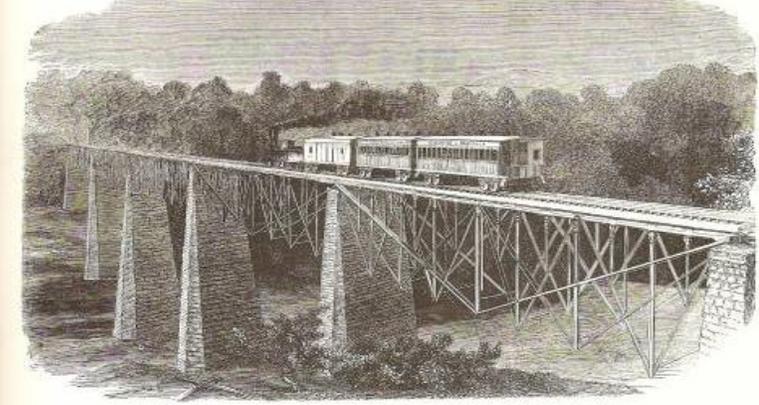
SOMMAIRE – **S2-C8**  
LES STRUCTURES SOUS-  
TENDUES ET LES  
MEMBRANES

1. Échauffement **10'**
2. Rappels **10'**
3. Cours **65'**
  - a. Les structures sous-tendues
  - b. Les réseaux de câbles
  - c. Les membranes
4. Bilan **5'**

## **S2-C8** LES STRUCTURES SOUS-TENDUES ET LES MEMBRANES

### 3.a Les structures sous-tendues

## **DU TREILLIS DE TYPE FINK VERS LA POUTRE SOUS-TENDUE**



1. Échauffement 10'
2. Rappels 10'
3. Cours 65'
  - a. Les structures sous-tendues
  - b. Les réseaux de câbles
  - c. Les membranes
4. Bilan 5'

## S2-C8 LES STRUCTURES SOUS-TENDUES ET LES MEMBRANES

### 3.a Les structures sous-tendues

#### STRUCTURES SOUS-TENDUES : PROBLÉMATIQUE

**Rappel** : Les treillis sont des structures réticulées, les barres fonctionnent soit en compression simple, soit en traction simple.

Dans le treillis de **type Fink**, les barres qui remontent les charges sont simplement tendues. **On peut donc remplacer les barres tendues par des câbles** : cela crée une **structure sous-tendue**.

**Problématique** : une poutre, élément de franchissement, a besoin d'une raideur en flexion suffisante : pour de grandes portées, si la raideur n'est pas assez élevée, la poutre **fléchit trop**.

Pour augmenter la raideur flexionnelle, **éloigner la matière en compression** (en partie haute) **de la matière en traction** (en partie basse de la poutre) : par exemple en plissant une coque, en faisant un arc ou grâce à une poutre treillis.

**La structure sous-tendue remplit le même but.**

## S2-C8 LES STRUCTURES SOUS-TENDUES ET LES MEMBRANES

### 3.a Les structures sous-tendues

#### STRUCTURES SOUS-TENDUES : DESCRIPTION

Une poutre permet de franchir une portée. Si elle n'est pas assez raide, alors elle fléchit trop.

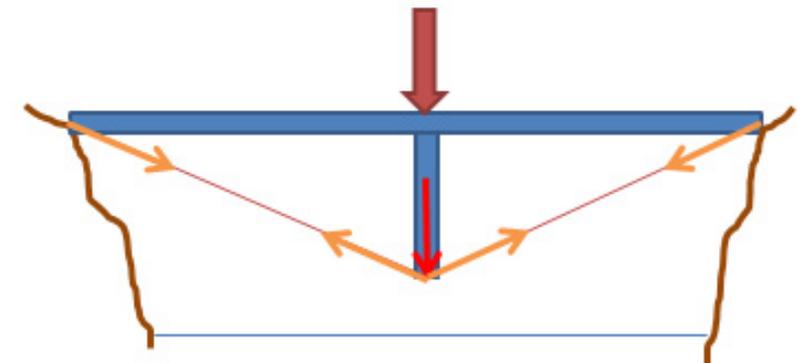
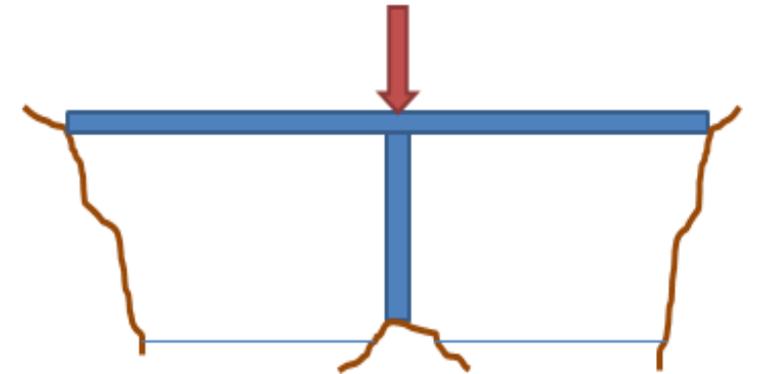
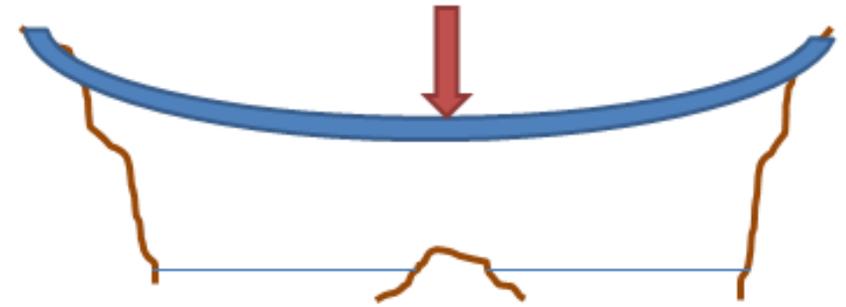
Le but est donc de la « remonter », par exemple avec une pile intermédiaire.

Mais si le ravin est trop profond, il faut une autre solution : on s'inspire du treillis de type Fink.

On remplace la pile par un **étais en compression**, une **entretoise**, et on **tend un câble** du bas de cet étais vers les culées sur les bords.

Ainsi, si une charge tend à faire fléchir le pont, l'affaissement induit par la déformation du tablier va tendre les câbles.

La tension dans les câbles va alors « remonter » le pont vers le haut et donc lutter contre la flexion.



1. Échauffement 10'
2. Rappels 10'
3. Cours 65'
  - a. Les structures sous-tendues
  - b. Les réseaux de câbles
  - c. Les membranes
4. Bilan 5'

1. Échauffement 10'
2. Rappels 10'
3. Cours 65'
  - a. Les structures sous-tendues
  - b. Les réseaux de câbles
  - c. Les membranes
4. Bilan 5'

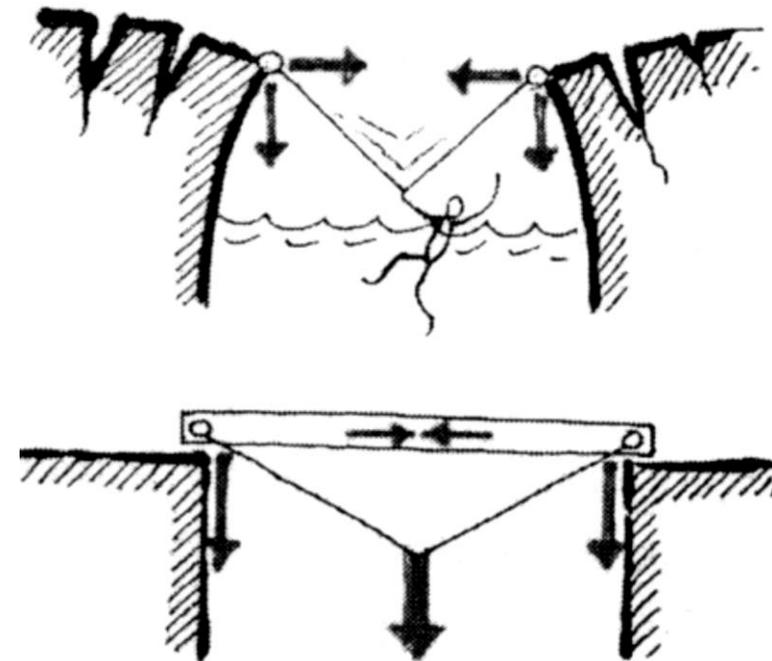
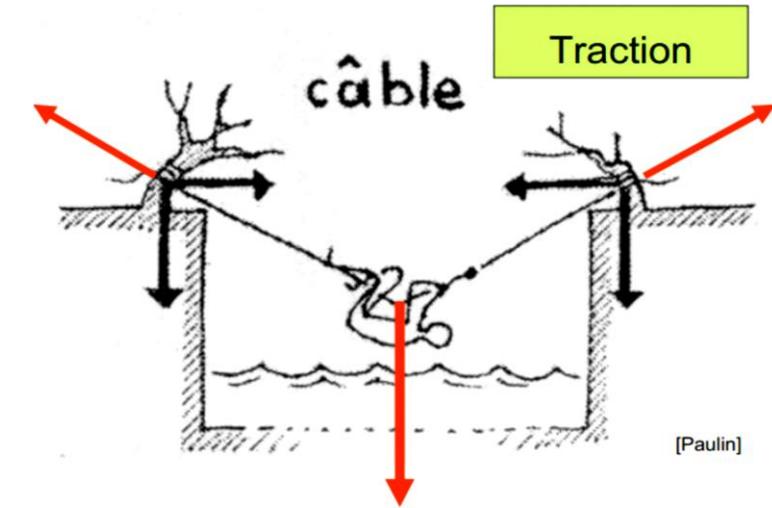
## S2-C8 LES STRUCTURES SOUS-TENDUES ET LES MEMBRANES

### 3.a Les structures sous-tendues

#### STRUCTURES SOUS-TENDUES : DESCRIPTION

Les éléments sous-tendus fléchissent peu. Cela vaut dire que **leur raideur a augmenté** : nous avons éloigné la traction de la compression, et donc augmenté le bras de levier du moment résistant interne qui lutte contre la flexion.

**La traction se situe ici dans le câble.** La traction dans le câble a pour effet de **mettre le tablier en compression**.



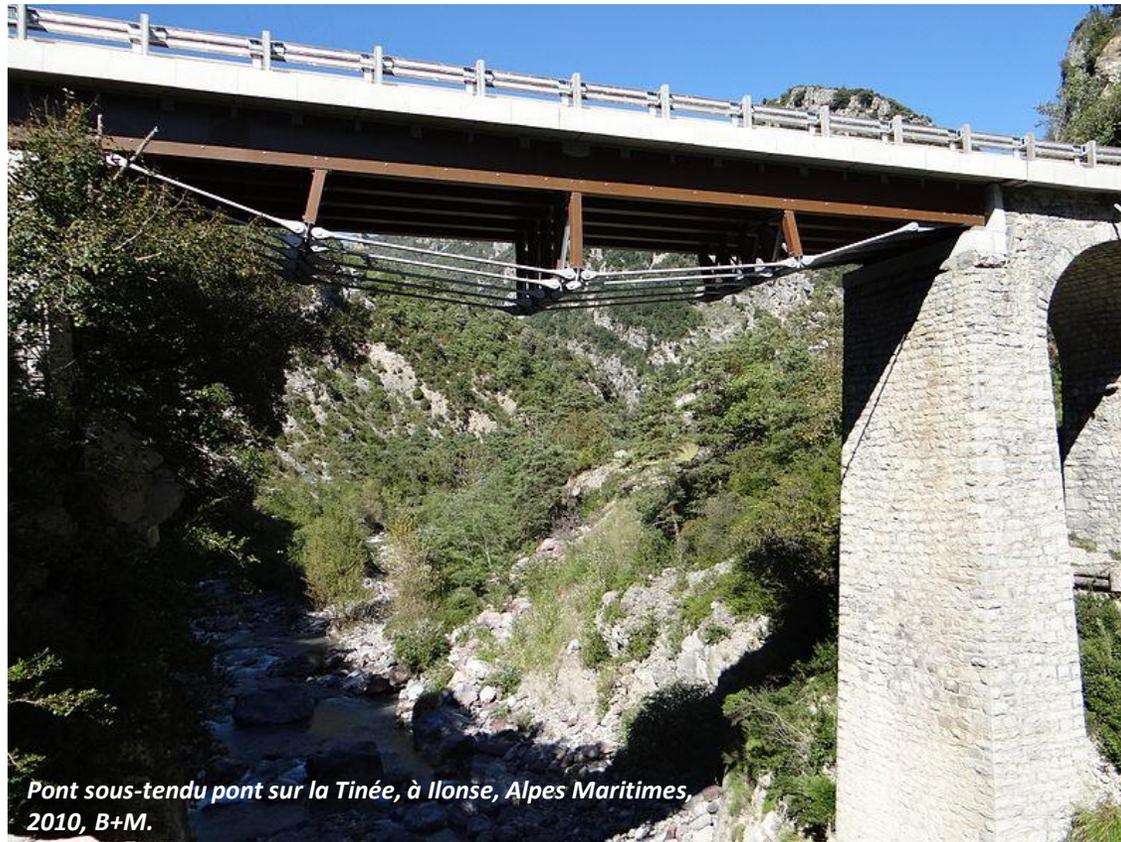
1. Échauffement **10'**
2. Rappels **10'**
3. Cours **65'**
  - a. Les structures sous-tendues
  - b. Les réseaux de câbles
  - c. Les membranes
4. Bilan **5'**

## **S2-C8** LES STRUCTURES SOUS-TENDUES ET LES MEMBRANES

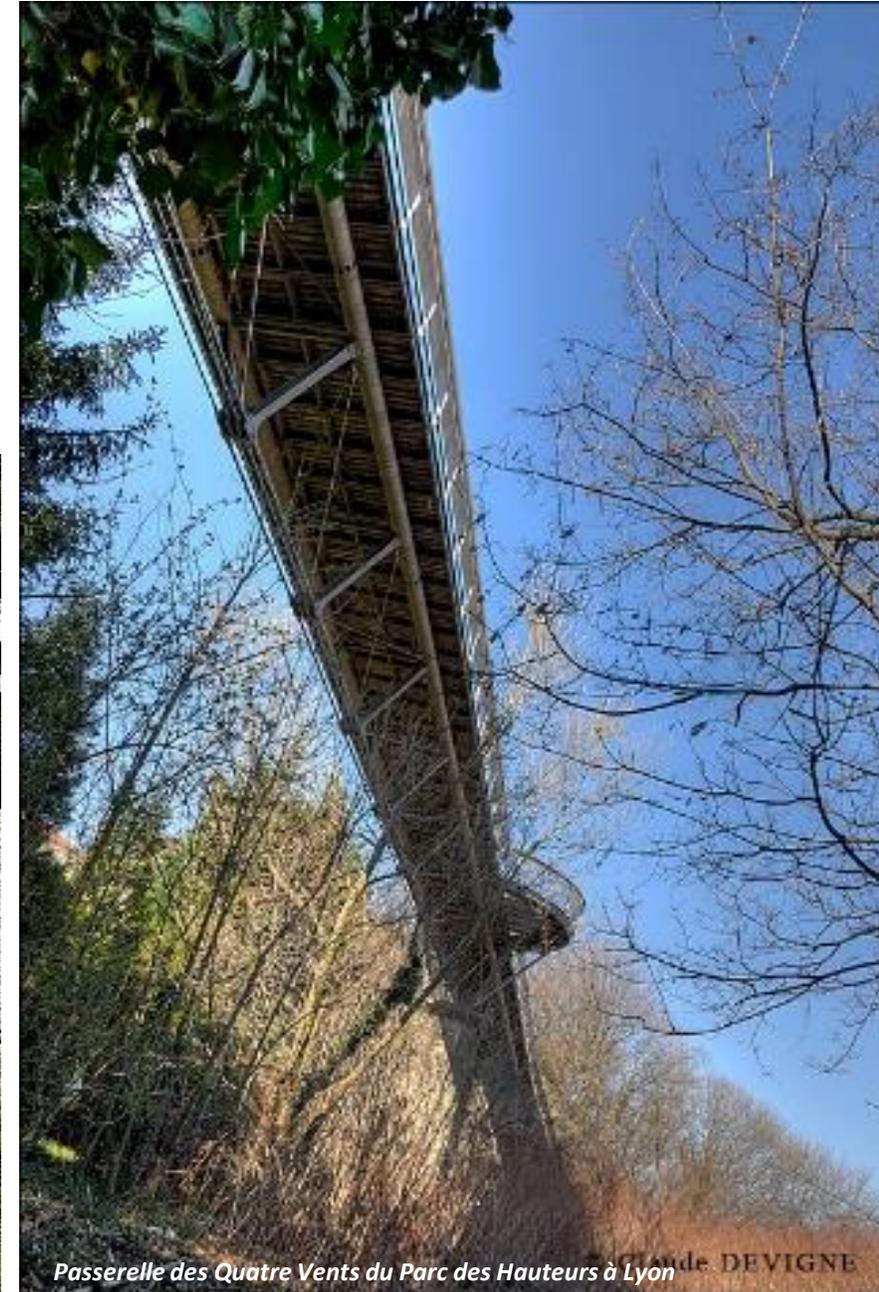
### 3.a Les structures sous-tendues

#### **STRUCTURES SOUS-TENDUES : APPLICATION**

Très utile pour le franchissement : couvertures de grands équipements et les ponts.



*Pont sous-tendu pont sur la Tinée, à Ilonse, Alpes Maritimes, 2010, B+M.*



*Passerelle des Quatre Vents du Parc des Hauteurs à Lyon*

1. Échauffement 10'
2. Rappels 10'
3. Cours 65'
  - a. Les structures sous-tendues
  - b. Les réseaux de câbles
  - c. Les membranes
4. Bilan 5'

## S2-C8 LES STRUCTURES SOUS-TENDUES ET LES MEMBRANES

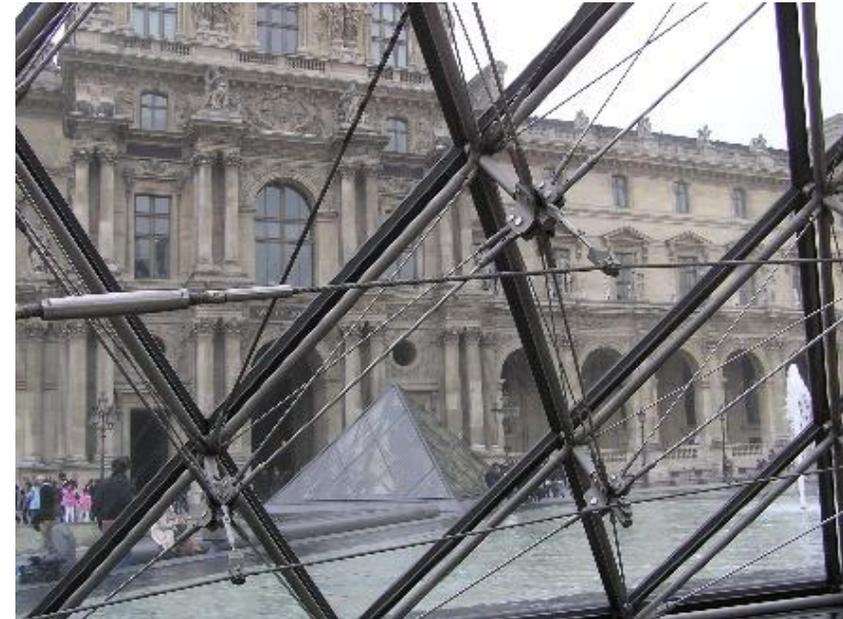
### 3.a Les structures sous-tendues

#### STRUCTURES SOUS-TENDUES : APPLICATION

**FACADES** : pour les grands murs-rideaux de verre (matériau à comportement fragile).

La résultante horizontale du vent est telle que le mur-rideau pourrait fléchir au-delà de la déformation admissible.

On dispose donc des câbles par derrière le verre, éloignés de celui-ci par des entretoises. Si le vent déforme la façade, ces câbles se tendent et la redressent.



## S2-C8 LES STRUCTURES SOUS-TENDUES ET LES MEMBRANES

### 3.a Les structures sous-tendues

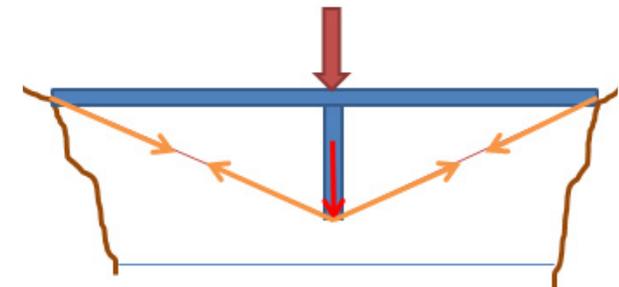
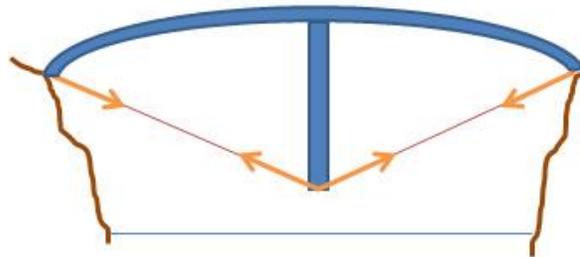
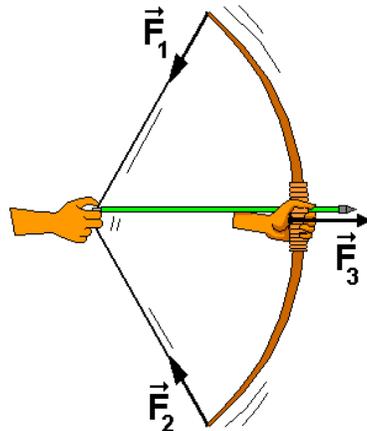
#### STRUCTURES SOUS-TENDUES : VERS LA PRÉCONTRAINTE

Jusqu'ici **le système est passif**. Au repos, il n'y a aucune force, ni dans le tablier ni dans les câbles.

Mais nous pourrions lutter contre la flèche de la flexion par une contre-flèche via un système **actif** : on tire sur les deux extrémités du câble alors que le système est au repos, il se met en tension comme lorsqu'on bande la corde d'un arc : la corde se tend et le bois fléchi.

En introduisant une tension dans le câble au repos, celui-ci va « remonter » le tablier, le faire **fléchir vers le haut** et donc induire une **contre-flèche** sur l'édifice alors qu'il n'est pas encore chargé.

Ainsi sous chargements permanent, la flexion va abaisser le pont et celui-ci apparaîtra plat.



## S2-C8 LES STRUCTURES SOUS-TENDUES ET LES MEMBRANES

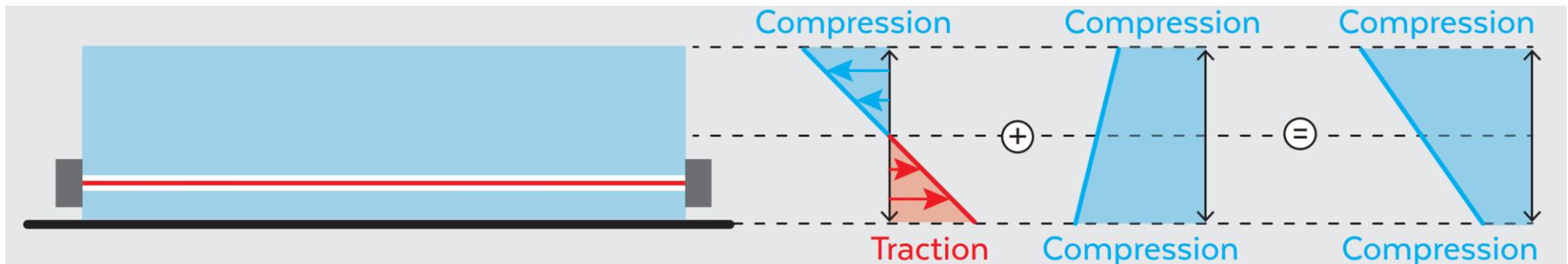
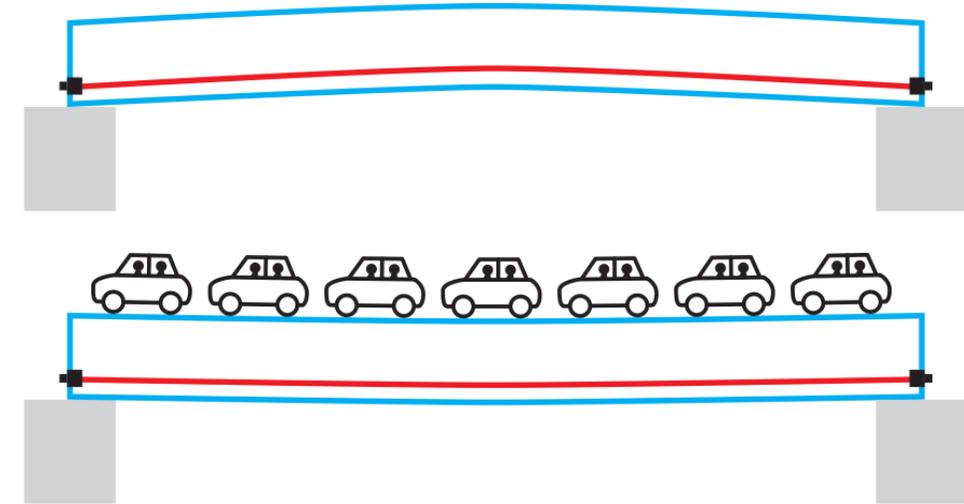
### 3.a Les structures sous-tendues

#### STRUCTURES SOUS-TENDUES : VERS LA PRÉCONTRAINTÉ

La **précontrainte** suit le même principe : un câble est introduit dans une poutre puis mis en tension, soit avant le coulage (**pré-tension**), soit après (**post-tension**). La tension du câble induit une contre-flèche.

Le câble, une fois tendu est bloqué dans la poutre, met le béton en compression. Or la flexion d'une poutre induit de la traction dans sa membrure inférieure et de la compression dans la membrure supérieure.

Si la compression introduite par la précontrainte est supérieure à la traction provoquée par la flexion, la résultante sera positive et toute la poutre restera comprimée (pas d'armatures passives). Le brevet a été déposé en 1928 par Eugène Freyssinet.



## SOMMAIRE – S2-C8 LES STRUCTURES SOUS-TENDUES ET LES MEMBRANES

1. Échauffement 10'
2. Rappels 10'
3. Cours 65'
  - a. Les structures sous-tendues
  - b. Les réseaux de câbles
  - c. Les membranes
4. Bilan 5'

1. Échauffement 10'

2. Rappels 10'

3. Cours 65'

- a. Les structures sous-tendues
- b. Les réseaux de câbles
- c. Les membranes

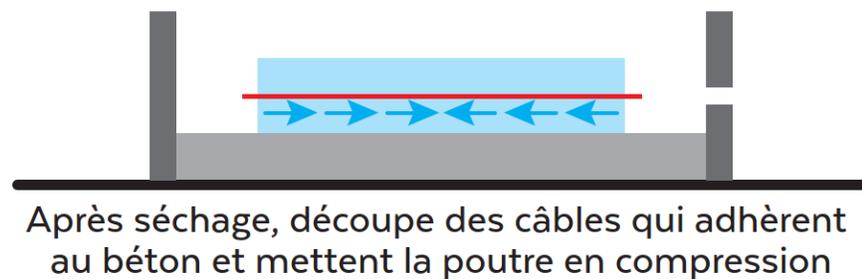
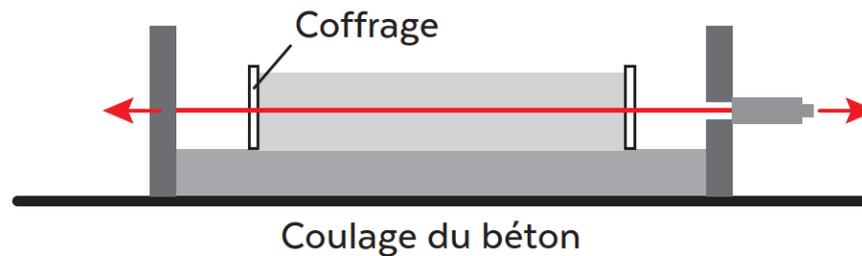
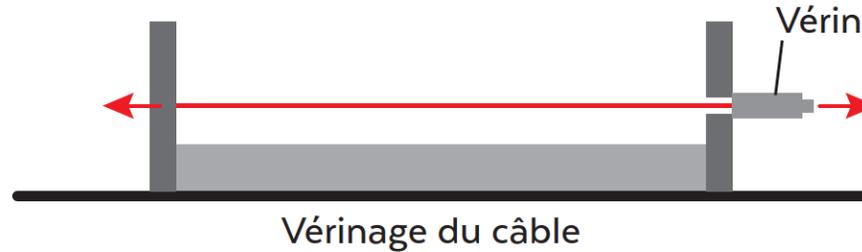
4. Bilan 5'

## S2-C8 LES STRUCTURES SOUS-TENDUES ET LES MEMBRANES

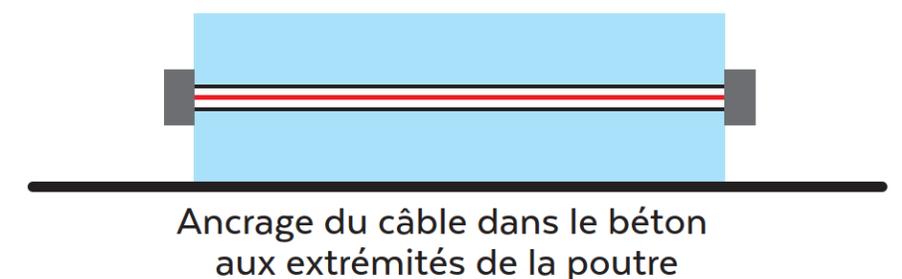
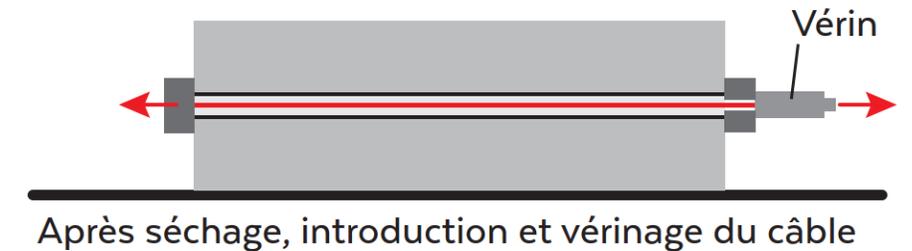
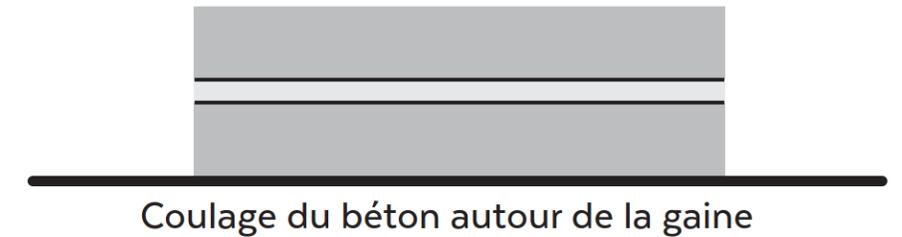
### 3.a Les structures sous-tendues

## STRUCTURES SOUS-TENDUES : VERS LA PRÉCONTRAINTE

Précontrainte par pré-tension :



Précontrainte par post-tension :



1. Échauffement 10'
2. Rappels 10'
3. Cours 65'
  - a. Les structures sous-tendues
  - b. Les réseaux de câbles
  - c. Les membranes
4. Bilan 5'

### 3.b Les réseaux de câbles

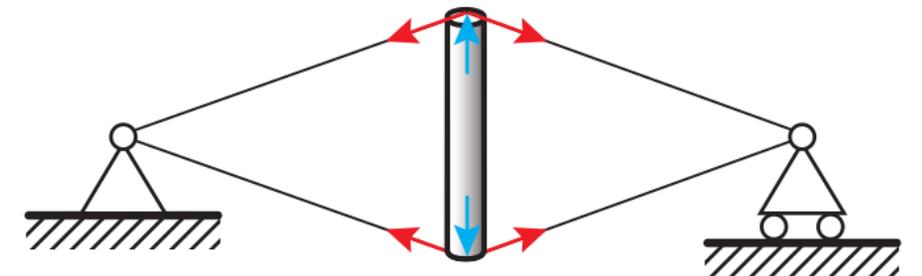
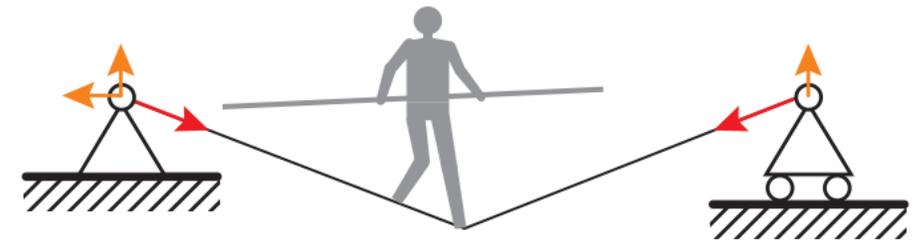
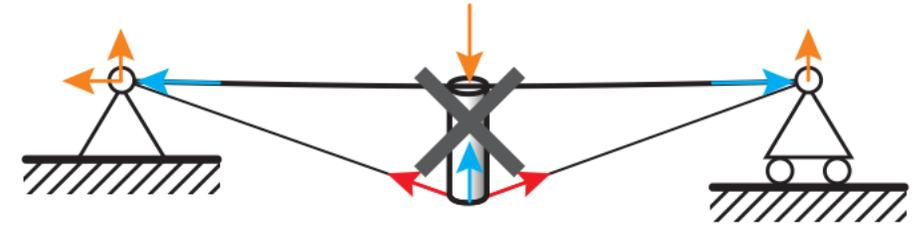
## LA POUTRE À CÂBLES

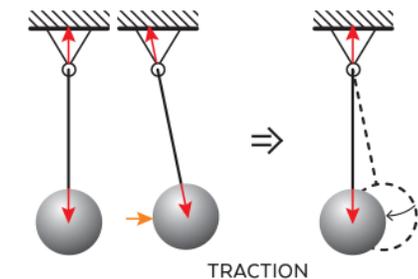
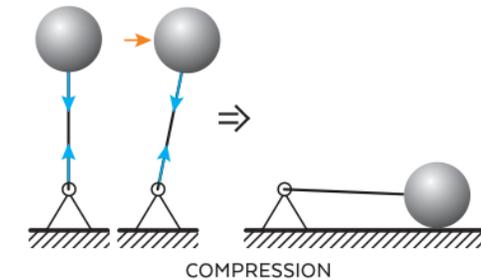
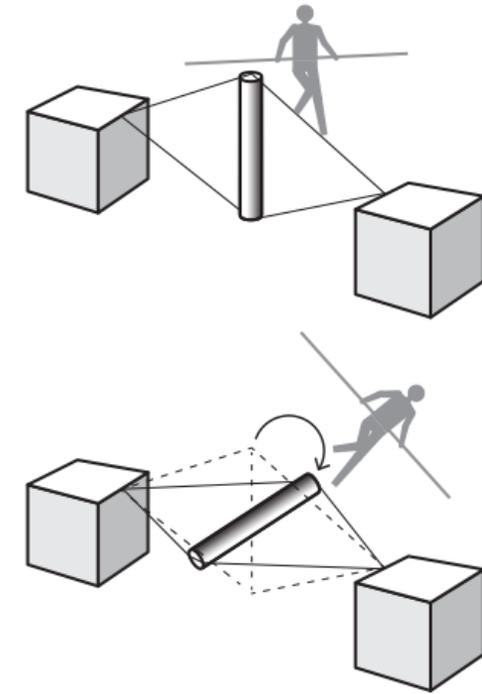
Imaginons que la portée d'une poutre sous-tendue soit telle que le tablier en compression ne soit pas réalisable.

Il faudrait pouvoir traverser sur le câble qui adaptera son funiculaire des forces à chaque pas, et se déformera beaucoup.

N'étant pas lesté, il se déplacera aussi beaucoup latéralement sous l'effet de petites sollicitations horizontales.

Solution : tendre un 2<sup>ème</sup> câble au-dessus de l'entretoise afin que les deux câbles se tendent mutuellement. Il s'agit d'une **structure autotendue**.





## S2-C8 LES STRUCTURES SOUS-TENDUES ET LES MEMBRANES

### 3.b Les réseaux de câbles

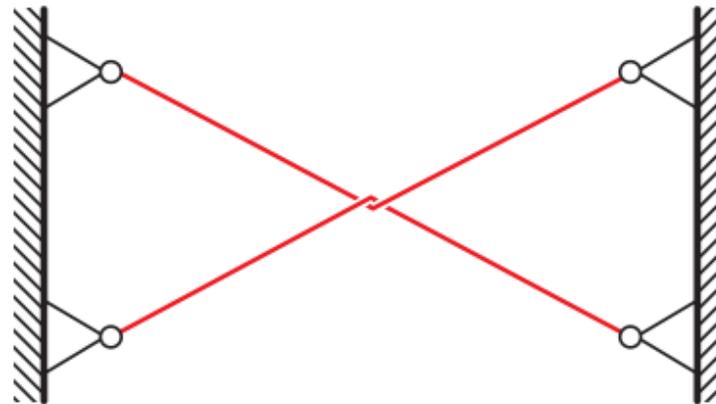
#### LA POUTRE À CÂBLES

Cette structure reste instable latéralement (à moins qu'elle soit lestée, tel un pont suspendu).

Cela est dû à la présence d'un élément en compression – la traction étant naturellement plus stable – en son sein.

La solution consiste à alors à supprimer l'entretoise et à tendre directement le câble avec le second câble, positionné en-dessous.

Ces principes permettent de former les **poutres à câbles**.



## SOMMAIRE – S2-C8 LES STRUCTURES SOUS- TENDUES ET LES MEMBRANES

1. Échauffement 10'
2. Rappels 10'
3. Cours 65'
  - a. Les structures sous-tendues
  - b. Les réseaux de câbles
  - c. Les membranes
4. Bilan 5'

## S2-C8 LES STRUCTURES SOUS-TENDUES ET LES MEMBRANES

### 3.b Les réseaux de câbles

## LA POUTRE À CÂBLES

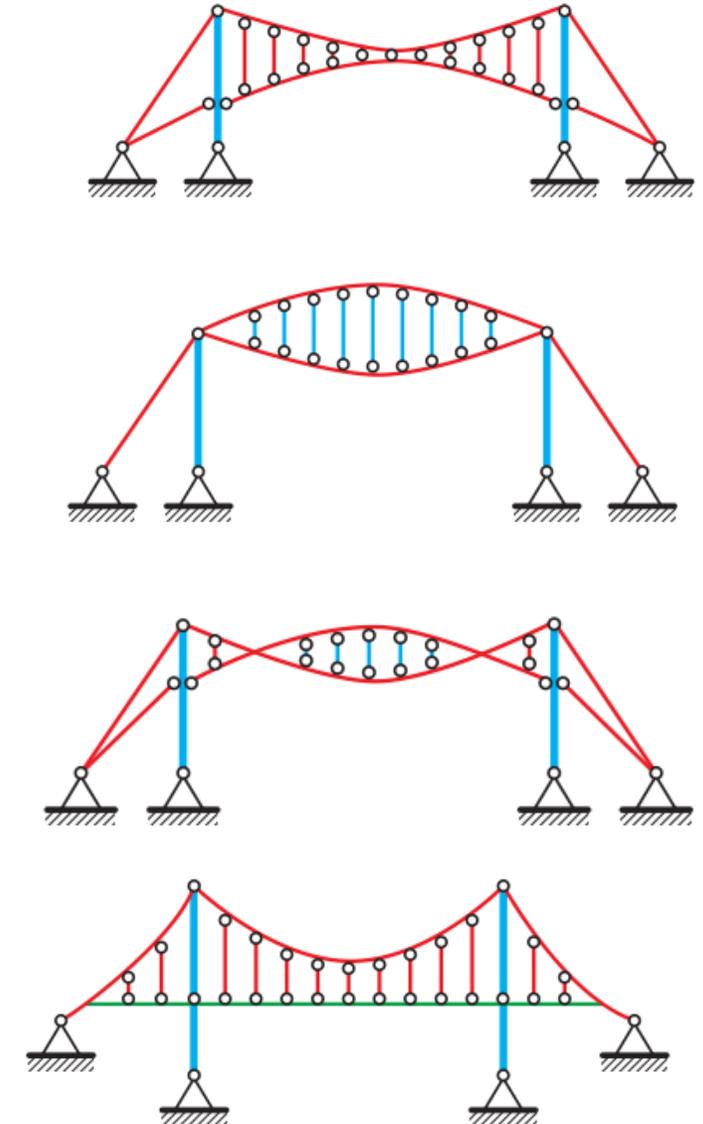
Exemple de poutres à câbles et de structures lestées.



Tribune de l'Ajax Amsterdam, 1996, René van Zuuk



Papeterie Burgo à Mantoue, Italie, 1961 - 1962, Pier Luigi Nervi.



## SOMMAIRE – S2-C8 LES STRUCTURES SOUS-TENDUES ET LES MEMBRANES

1. Échauffement 10'
2. Rappels 10'
3. Cours 65'
  - a. Les structures sous-tendues
  - b. Les réseaux de câbles**
  - c. Les membranes
4. Bilan 5'

## S2-C8 LES STRUCTURES SOUS-TENDUES ET LES MEMBRANES

### 3.b Les réseaux de câbles

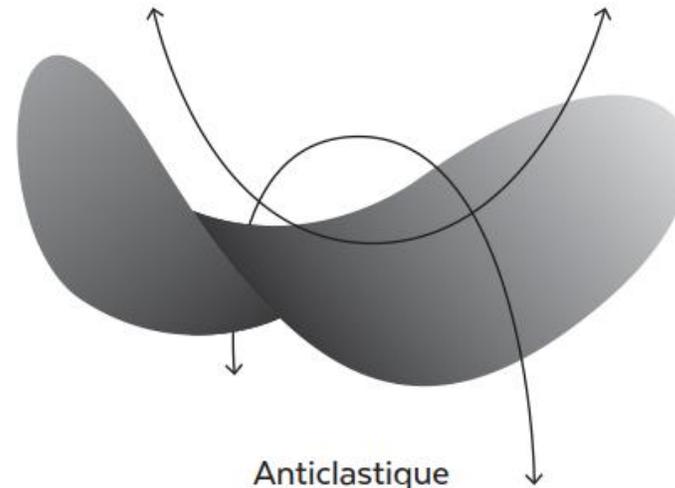
#### FONCTIONNEMENT DES RÉSEAUX DE CÂBLES

Cette structure manque encore de stabilité latérale : tendons alors, comme pour une tente, le deuxième câble de façon perpendiculaire. Ce type de structure nécessite deux conditions :

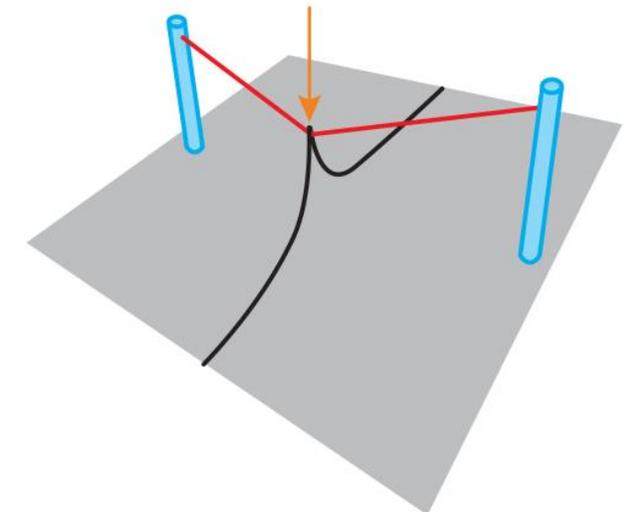
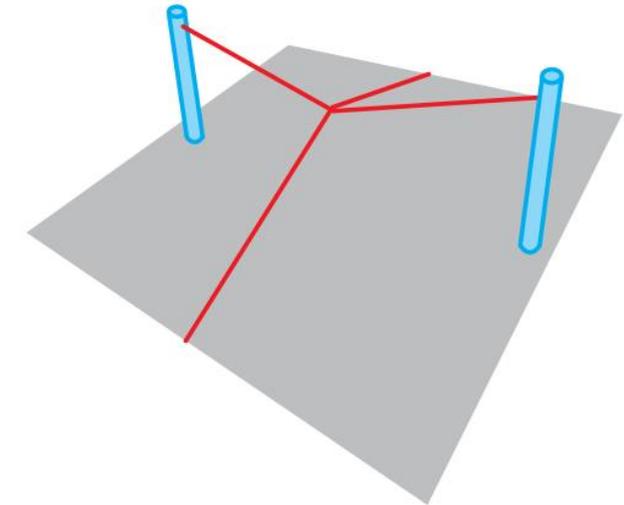
1. Les deux courbures doivent être inverses (**forme anticlastique**).
2. Au moins un des câbles doit être prétendu (sinon le moindre chargement détendrait une des deux nappes de câbles).



Synclastique



Anticlastique



## SOMMAIRE – S2-C8 LES STRUCTURES SOUS- TENDUES ET LES MEMBRANES

1. Échauffement 10'
2. Rappels 10'
3. Cours 65'
  - a. Les structures sous-tendues
  - b. Les réseaux de câbles**
  - c. Les membranes
4. Bilan 5'

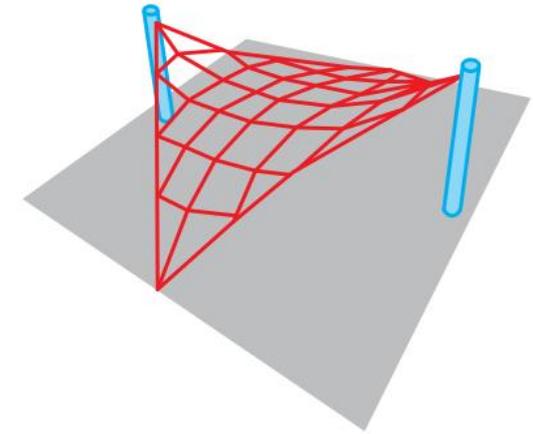
1. Échauffement 10'
2. Rappels 10'
3. Cours 65'
  - a. Les structures sous-tendues
  - b. Les réseaux de câbles**
  - c. Les membranes
4. Bilan 5'

## S2-C8 LES STRUCTURES SOUS-TENDUES ET LES MEMBRANES

### 3.b Les réseaux de câbles

#### FORME DES RÉSEAUX DE CÂBLES

En répétant cette opération, on obtient un réseau de câbles (deux nappes de câbles orthogonales), de forme de **paraboloïde hyperbolique** (selle de cheval).



J. S. Dorton Arena, Raleigh, Caroline du Nord, Etats-unis, 1952, Maciej Nowicki architecte.

1. Échauffement 10'
2. Rappels 10'
3. Cours 65'
  - a. Les structures sous-tendues
  - b. Les réseaux de câbles
  - c. Les membranes
4. Bilan 5'

### 3.c Les membranes

## DES RÉSEAUX DE CÂBLES AUX MEMBRANES

Lorsque les câbles sont si rapprochés qu'ils se touchent presque, ils deviennent un tissu : ce sont les **membranes**. Elles jouent un rôle structurel par opposition aux toiles posées (comme sur les tipis).

On trouve leur forme par la méthode de la **relaxation dynamique**, cf. bibliographie du cours.

Leur mise en œuvre se fait par la **découpe de lés**, obtenus par la mise à plat de la **surface développable**.

**Frei Otto** fut un des grands promoteurs de ces structures.

### LES DIFFÉRENTS TYPES DE MEMBRANES



Auvent en selle de cheval simple. Exemple : kiosque à musique à Kassel, Allemagne (Frei Otto arch., 1955).



Membrane à câbles de vallée. Exemple : pavillon Tanzbrunnen à Cologne, Allemagne (Frei Otto arch., 1957)



Membrane à arceaux (mont). Exemple : laboratoire de recherche à Venafro, Italie (Samyn and Partners arch., 1989 - 1991).



Membrane à point haut (mât). Exemple : club diplomatique de Riyad, Arabie Saoudite (Frei Otto arch., 1980).

1. Échauffement **10'**
2. Rappels **10'**
3. Cours **65'**
  - a. Les structures sous-tendues
  - b. Les réseaux de câbles
  - c. Les membranes
4. Bilan **5'**

## Qu'a-t-on appris aujourd'hui?

1. Échauffement 10'
2. Rappels 10'
3. Cours 65'
  - a. Les structures sous-tendues
  - b. Les réseaux de câbles
  - c. Les membranes
4. Bilan 5'

À LA SEMAINE PROCHAINE !

