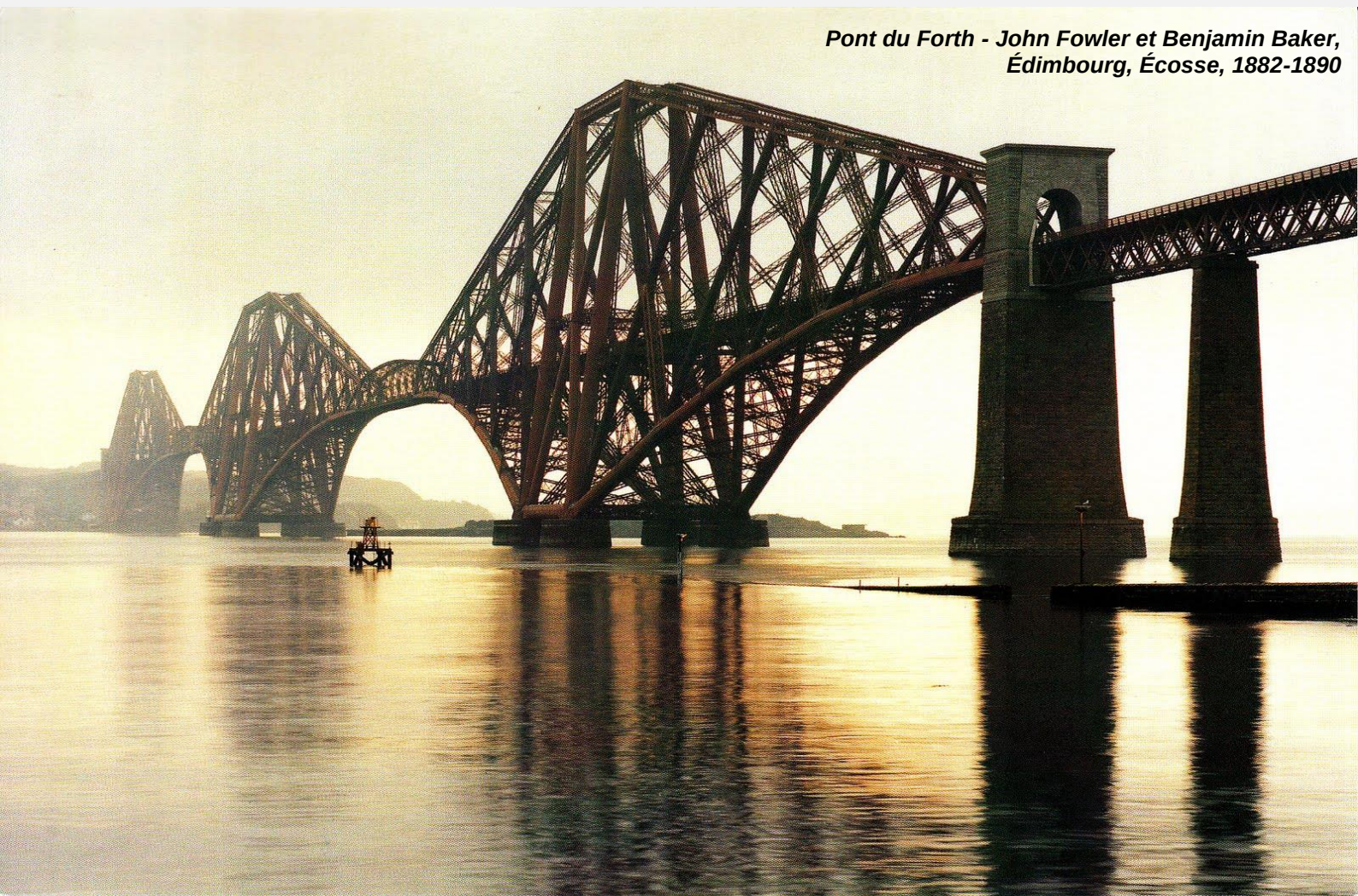


CM : **STRUCTURE 1**

CYCLE LICENCE S3/S4

Marc LEYRAL – Sylvain EBODE

*Pont du Forth - John Fowler et Benjamin Baker,
Édimbourg, Écosse, 1882-1890*



S1-C5

LE SCHÉMA STATIQUE

Les appuis et les liaisons, le schéma statique, la staticité des structures

ECHAUFFEMENT

Chaque cours commence par un petit exercice d'échauffement, afin de rendre ludique l'usage des mathématiques et de la logique

L'Homme à la cigarette



Ce fumeur invétéré fait tout ce qu'il ne faut pas faire pour sa santé : il fume, et il fume beaucoup.
Lorsqu'il est enlevé par des extraterrestres, ceux-ci l'enferment dans une petite geôle où il trouve 9 mégots.
Il n'arrive pas à se retenir. Sachant qu'avec des feuilles qu'il possède sur lui, il parvient à faire une cigarette entière avec 3 mégots, combien pourra-t-il fumer de cigarettes dans sa geôle ?

Réponse : il en fait quatre.

• 9 mégots = 3 cigarettes entières qu'il va fumer et obtenir 3 nouveaux mégots

• Puis avec ces 3 mégots il peut faire une quatrième cigarette

Cela n'empêche pas qu'il devrait arrêter.

Rappel de cours : équilibres, analyse des charges et éléments des structures

Les équilibres externes

Le Principe Fondamental de la Statique – A SAVOIR PAR CŒUR

L'étude d'une structure existante part de l'hypothèse évidente qu'elle est en équilibre.

Cet équilibre suppose que (conditions nécessaires et suffisantes) :

1. **La structure ne subisse pas de glissement : théorème de la résultante statique.**

Le **glissement** est le déplacement en **translation** d'une structure.

Ce sont les **forces** qui entraînent les translations.

Pour qu'une structure ne glisse pas, il faut donc que **la somme des vecteurs forces qui s'exercent sur la structure soit nulle.**

$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$

Si on projette sur chacun des axes du repère orthonormé :

$$\begin{cases} \sum F_X = 0 \\ \sum F_Y = 0 \end{cases}$$

2. **La structure ne subisse pas de basculement : théorème du moment statique.**

Le **basculement** est dû à une **rotation**.

Les **moments** qui agissent sur la structure provoquent les rotations.

Pour l'éviter, il faut donc que **la somme des moments qui s'exercent sur la structure, calculés en un même point quelconque de la structure, soit nulle.**

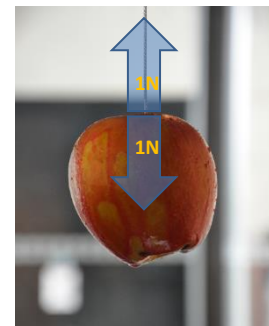
$$\sum M_A(\vec{F}) = 0$$

Troisième loi de Newton : Principe des actions réciproques

« Tout corps A exerçant une force sur un corps B subit une force d'intensité égale, de même direction mais de sens opposé, exercée par le corps B »

Ce qui signifie que si A et B sont deux corps en interaction et en équilibre, la force exercée par A sur B et la force exercée par B sur A sont directement opposées et de même valeur.

$$\vec{F}_{A \rightarrow B} = -\vec{F}_{B \rightarrow A}$$



Les types de charges :

	CHARGES PONCTUELLES	CHARGES LINEIQUES	CHARGES SURFACIQUES
Fonction	La force se concentre en un point	L'action se répartit sur une ligne	L'action se répartit sur toute la surface .
Unité	N	N/m	N/m ²
Exemple	Poids d'un poteau	Poids d'un voile	Charge du vent
Illustration			

La classification des charges :

CHARGES PERMANENTES	• <u>Structurelles (G)</u> si elles participent à la structure (murs porteurs, poteaux, poutres, dalles, etc.) • <u>Non structurelle (G')</u> si elle ne participe pas à la structure (revêtements, cloisons, etc.)	
CHARGES VARIABLES	<u>Charges d'exploitation (Q)</u> : poids des usagers, des meubles, etc. <u>Charges climatiques</u> : vent (W), neige (S)	
AUTRES CHARGES	<u>Charges accidentelles</u> : séisme, choc de camion, etc.	

Les Etats Limites :

Deux critères, appelés Etat Limites, sont à vérifier indépendamment pour tous les bâtiments :

- **L'Etat Limite de Service (ELS)**

C'est une **condition d'usage** qui doit être maintenue pour une **utilisation normale** (le bâtiment ne doit avoir une **déformation** de nature à gêner les gens qui l'utilisent) = doit être respectée pour des **charges normales, habituelles**.

- **L'Etat Limite Ultime (ELU)**

C'est une condition de **non-effondrement** relative à la **sécurité des personnes** qui doit être maintenue même sous des **conditions extrêmes**.

A chaque état limite correspondent des coefficients de pondération des charges, appelés coefficients de sécurité. Ils permettent de combiner les charges.

ELS :

$$1*(G+G') + 1*Q$$

ELU :

$$1,35*(G+G') + 1,5*Q$$

Les éléments structuraux :

Franchir :

Le rôle des éléments qui franchissent est de couvrir les espaces et de distribuer les charges vers les éléments qui portent. Ils fonctionnent essentiellement en flexion. La flexion est-elle même une combinaison de compression et de traction.



Poutres I bois



Poutre IPE en acier



Poutre en béton armé

Porter :

Le rôle des éléments qui portent est de faire transiter l'ensemble des charges vers les fondations et le sol.

• Les étais

- Les étais fonctionnent principalement en **compression**, ils peuvent rompre normalement par **écrasement** ou **cisaillement** ou encore peuvent devenir **instables (flambement)**. Pour éviter ce phénomène, **ils sont en général épais**, on dit que leur élancement est faible.



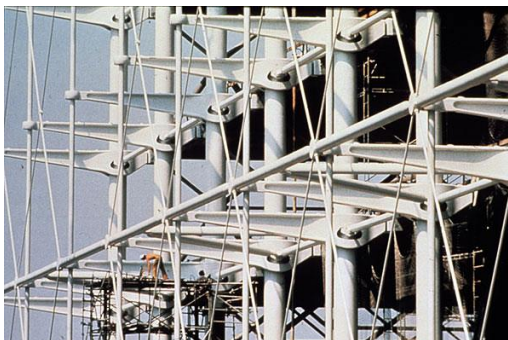
Pilastres fabrique Casaramona – Barcelone -



Salle hypostyle – IMA – Jean Nouvel - 1987

• Les tirants

- Les tirants fonctionnent principalement en **traction**. Contrairement aux étais, ils sont stables et **sont en général fins**, on dit que leur élancement est élevé.



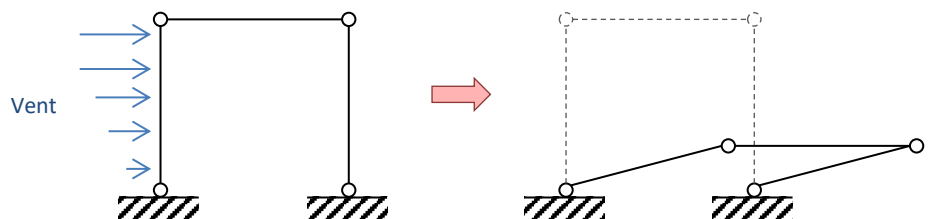
Centre Pompidou – Rogers/Piano– Paris - 1972



Usine Renault – Norman Foster - 1982

Contreventer :

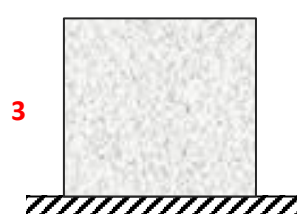
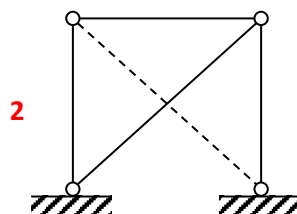
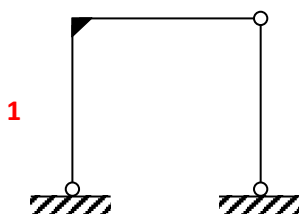
En cas d'efforts horizontaux (vent, séisme, etc.), une structure mal contreventée peut se déformer excessivement, voire perdre sa stabilité et s'effondrer comme un château de carte.



Il est donc impératif de rajouter des éléments pour **ajouter un hyperstatisme résistant aux efforts horizontaux**.

Ces éléments peuvent être :

1. Un encastrement à une liaison ou un appui (≈ élément « ponctuel »)
2. Une ou plusieurs barres de contreventement (élément linéique)
3. Un voile ou un noyau de contreventement (élément(s) surfaciques(s))



Sommaire du cours

SOMMAIRE DU COURS	6
5 LE SCHEMA STATIQUE	7
5.1 Les systèmes de liaisons	7
5.1.1 Degrés de liberté	7
5.1.2 Principe général dans l'espace (en 3D)	7
5.1.3 Les principales liaisons en structure (en 2D)	8
5.1.3.1 L'appui simple (ou appui glissant)	8
5.1.3.2 La rotule (ou articulation)	9
5.1.3.3 L'encastrement	9
5.2 Le schéma statique	10
5.2.1 Utilité	10
5.2.2 Réalisation	10
5.2.3 Exemples	11
5.2.3.1 Pont treillis de type Warren	11
5.2.3.2 La potence de levage	11
5.3 Staticité	12
5.3.1 Signification de la staticité	12
5.3.2 Calcul du degré de staticité	14
5.3.3 Exemples	15
5.3.3.1 Les portiques	15
5.3.3.2 Pont treillis de type Warren	16
5.3.3.3 La potence	16

5 Le schéma statique

Le principe du schéma statique est de réaliser une simplification à l'extrême d'un système structurel en 2D afin d'en permettre le calcul.

Les éléments structuraux ayant été vus, il reste à comprendre comment les relier entre eux (**liaisons**) et rattacher la structure au sol ou au support (**appuis**).

5.1 Les systèmes de liaisons

5.1.1 Degrés de liberté

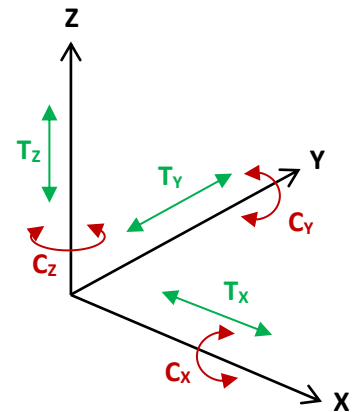
Tout mouvement – quel qu'il soit – peut se décomposer en la somme d'une **translation** et d'une **rotation**.

On appelle **degré de liberté (DDL)** la capacité à se mouvoir soit en translation soit en rotation dans une projection donnée.

5.1.2 Principe général dans l'espace (en 3D)

Tout mouvement dans l'espace en trois dimensions peut ainsi se décomposer en **trois composantes de translation** et en **trois composantes de rotation** de base :

- La translation selon X : T_x
- La translation selon Y : T_y
- La translation selon Z : T_z
- La rotation autour de l'axe X : C_x
- La rotation autour de l'axe Y : C_y
- La rotation autour de l'axe Z : C_z



On appelle degré de liberté la capacité à se mouvoir dans chacune de ces six composantes.

Exemples :

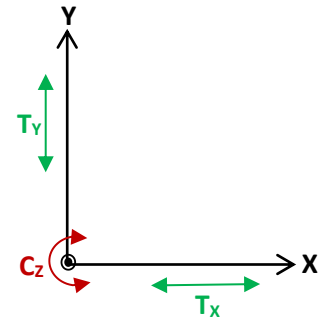
- un astronaute dans l'espace n'est retenu par rien, il peut se mouvoir dans les trois sens de translation et tourner dans les trois sens de rotation : il a **6 degrés de liberté dans l'espace**.
- La lampe Jieldé est reliée à son bras par une **rotule** : celle-ci bloque toutes les translations mais on peut la tourner autour des trois axes de rotation : elle a **3 degrés de liberté dans l'espace**.
- Un arbre est **encasté** par ses racines dans le sol : on ne peut pas le translater ni le tourner : il n'a **aucun degré de liberté dans l'espace**.



5.1.3 Les principales liaisons en structure (en 2D)

Cela étant vu, il faut rappeler qu'**en structure, on s'intéresse (quasi) systématiquement à des problèmes plans**, cela pour plusieurs raisons :

- Par habitude, on travaille dans espace 2D : celui de la feuille de dessin
- Les calculs sont largement simplifiés
- Les systèmes classiques de poutres sont orthogonaux : on peut donc les étudier, dans un premier temps, dans une direction avant d'analyser l'autre direction en récupérant les résultats du premier calcul. Pour se familiariser avec ce processus, entraînez-vous à faire tout seul le sujet de TD S1-B : la Maison de Bordeaux de Rem Koolhaas et Cécil Balmond.



Cela simplifie déjà grandement la représentation puisque **tout mouvement dans le plan** (espace d'une feuille de dessin) **peut se décomposer en trois composantes de base** (deux translations et une rotation) :

- La translation d'axe horizontal : T_x
- La translation d'axe vertical : T_y
- La rotation dans le plan (c'est-à-dire d'axe transversal au plan) : C_z

On peut ainsi limiter à trois le nombre de liaisons et d'appuis généralement rencontrés dans le monde des structures architecturales :

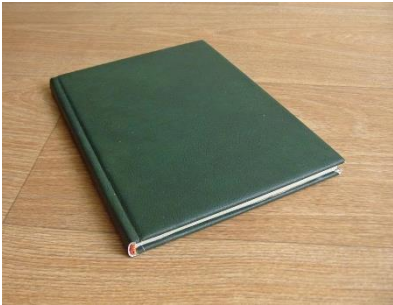
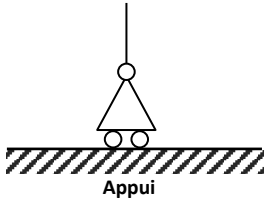
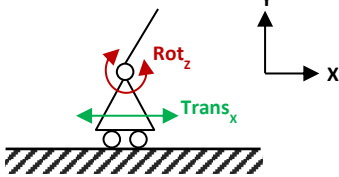
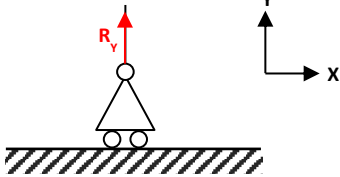
5.1.3.1 L'appui simple (ou appui glissant)

L'**appui simple** ou **appui glissant** est une liaison qui laisse libre :

- une translation
- la rotation

Elle a donc **deux degrés de liberté** et **une translation bloquée**.

Puisqu'il bloque une translation, alors un appui simple aura **une réaction en force** à son endroit, soit une inconnue à calculer.

L'Appui simple ou Appui glissant		
Avec les mains	Dans la vie de tous les jours	Dans le monde des structures
		
Représentation	DDL : 1 translation + 1 rotation	1 Réaction en force = 1 inconnue
		

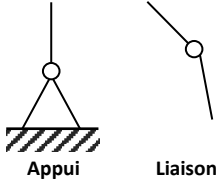
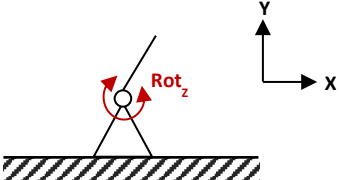
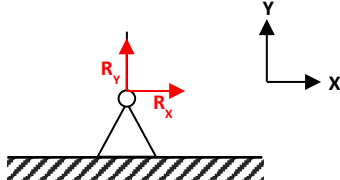
5.1.3.2 La rotule (ou articulation)

La **rotule**, ou **articulation**, est une liaison qui laisse libre :

- la rotation

Elle a donc **un degré de liberté** et **deux translations bloquées**.

Puisqu'elle bloque deux translations, alors une rotule aura **deux réactions en force** à son endroit, soit deux inconnues à calculer.

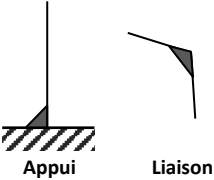
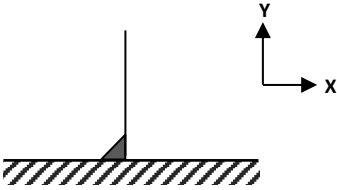
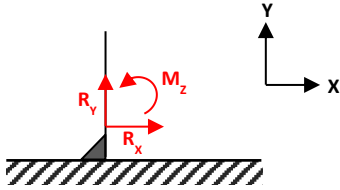
La Rotule ou Articulation		
Avec les mains	Dans la vie de tous les jours	Dans le monde des structures
		
Représentation	DDL : 1 rotation	2 Réactions en force = 2 inconnues
		

5.1.3.3 L'encastrement

L'**encastrement** est une liaison qui **ne laisse libre aucun degré de liberté**.

Il bloque donc les deux translations et la rotation.

Puisqu'elle bloque les 3 DDL, alors un encastrement aura **deux réactions en force et une réaction en moment** à son endroit, soit trois inconnues à calculer.

L'Encastrement		
Avec les mains	Dans la vie de tous les jours	Dans le monde des structures
		
Représentation	DDL : aucun	2 Réactions en force + 1 Réaction en moment = 3 inconnues
 Appui Liaison		

5.2 Le schéma statique

5.2.1 Utilité

Le schéma statique est un outil dont **la réalisation est obligatoire** avant toute résolution calculatoire ou graphique d'un problème de structure. **Cela doit être un réflexe.**

Il s'agit d'un **schéma simplifié** ne montrant de la structure que **ce est qui juste nécessaire** à sa résolution.

5.2.2 Réalisation

On trace sur un schéma statique uniquement les points suivants :

- Les **éléments structurels** dessinés sous forme de **barres** (un trait)
- Les **liaisons** et les **appuis**
- (Eventuellement) les **forces** en jeu et les **distances**

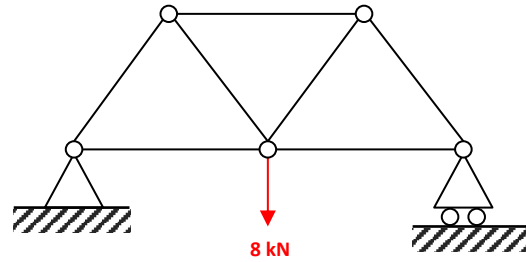
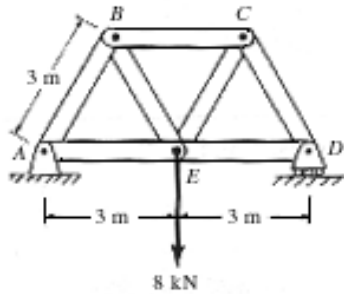
Le dernier point est « facultatif » : il s'agit de rajouter sur le schéma statique uniquement les informations nécessaires au problème.

En revanche on ne représente pas :

- Les épaisseurs
- Les matériaux
- Les éléments non structurels
- Les détails d'assemblage
- Etc.

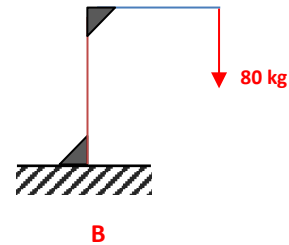
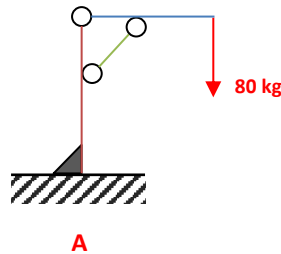
5.2.3 Exemples

5.2.3.1 Pont treillis de type Warren



5.2.3.2 La potence de support de sac

Deux schémas sont possibles en fonction du **degré de détails** que l'on souhaite représenter (et étudier).



Attention : la diagonale ne coupe ni le poteau ni la poutre (schéma A). Pour la suite, qui s'intéresse au degré de staticité des structures, il est très important de le montrer (ici, par exemple, en décalant la rotule de l'axe du poteau et de la poutre, ou en dessinant le poteau et la poutre avec une couleur pour montrer que la barre est continue).

5.3 Staticité

5.3.1 Signification de la staticité

Définition : En simplifiant le discours, on pourrait dire que la staticité est l'étude du nombre d'équilibres d'un système.

Celui-ci dépend :

- Du nombre et du type d'**appuis** de la structure
- Du nombre et du type de **liaisons** de la structure

On peut lister **trois types de staticité** :

- L'**hypostaticité** est un système sans équilibre stable*, un mécanisme par exemple.
- L'**isostaticité** est un système avec un et un seul équilibre stable.
- L'**hyperstaticité** est un système avec plusieurs équilibres stables.

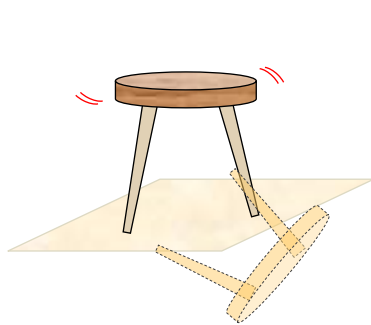
Dans le domaine des **structures architecturales**, les mécanismes hypostatiques sont (quasiment toujours) proscrits : on ne veut pas que la structure puisse librement se mouvoir.

Seuls les cas **isostatique** et **hyperstatique** nous intéressent.

* C'est une vision simplifiée, dans l'exemple ci-dessous du cadre accroché au mur, il y a liberté de mouvement mais l'équilibre est stable.

Regardons deux exemples introductifs simples où l'on ne regarde, pour commencer, que la question des appuis.

Prenons l'exemple d'un tabouret :



S'il n'a que **deux pieds**, il est en **équilibre instable**.

On dira qu'il est **hypostatique**.

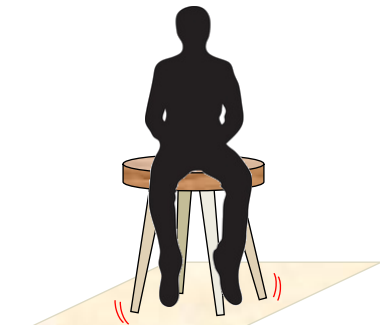
Je ne m'assiérais pas dessus.



S'il a **trois pieds**, il a un **unique équilibre stable**.

On dira qu'il est **isostatique**.

Je peux m'asseoir dessus.



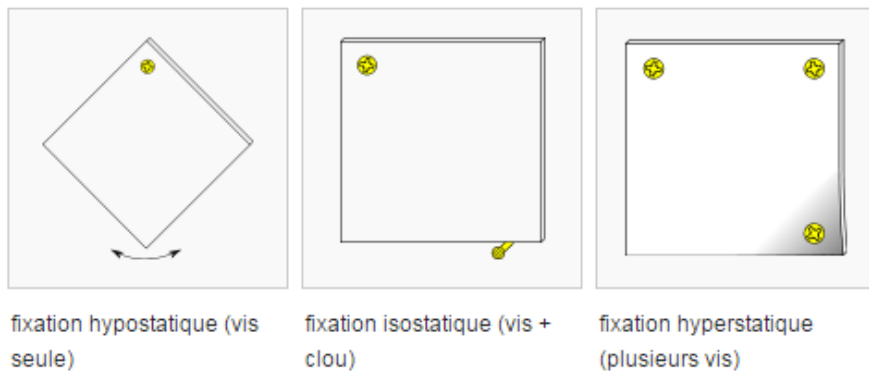
S'il a **quatre pieds**, c'est surabondant : il a un **plusieurs équilibres stables** : il est bancal (en fonction de comment je m'assois dessus, il oscille entre plusieurs équilibres différents à trois pieds sur quatre).

On dira qu'il est **hyperstatique**.

Je peux m'asseoir dessus.

(Source : Michel Provost et Philippe de Kemmeter, *Comment tout ça tient ? Voyage au pays des structures.*)

Wikipédia propose l'illustration d'un cadre fixé à un mur :



L'**isostaticité** peut être utilisée pour des raisons **économiques** (moins de matière, mise en œuvre plus facile). Néanmoins, pour des raisons de **sécurité**, pour des raisons de sécurité, les structures sont généralement globalement hyperstatiques (cela n'empêche pas de les réaliser avec des trames isostatiques).

Par exemple, la voûte du terminal 2^E de Roissy était faiblement hyperstatique, la rupture d'un bracon (ruine locale) a conduit à une ruine globale.

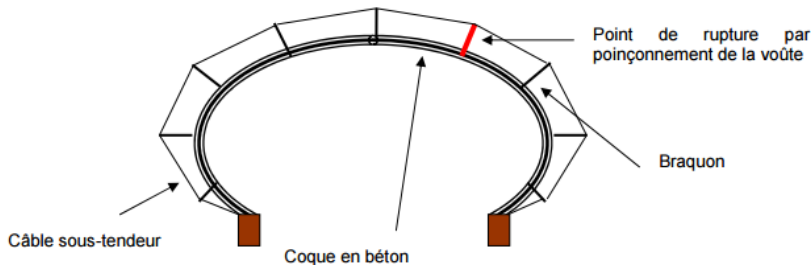
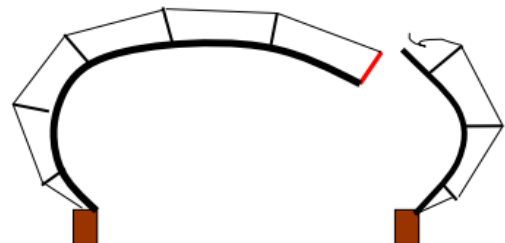


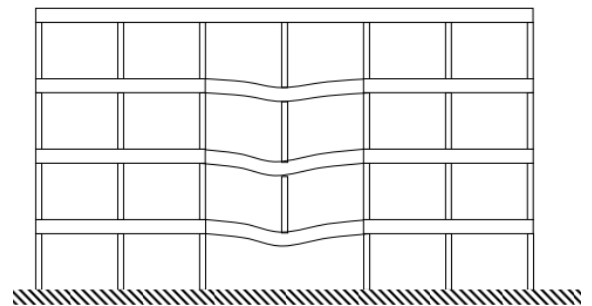
Schéma de la section transversale de la voûte de la jetée de l'aéroport CDG 2^E



Ruine de la section entraînant la ruine générale de la coque

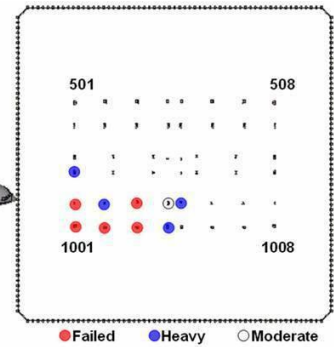
Effondrement terminal 2^E de Roissy (source : <http://www.rdmestp.fr/>)

En revanche, les tours et d'autres bâtiments à portiques, ont souvent plus de poteaux que nécessaire, ainsi le sectionnement d'un ou plusieurs poteaux provoque au pire un effondrement local mais pas la ruine du bâtiment car le poids se répartit alors sur les poteaux restants non sectionnés. Le *World Trade Center*, par exemple, a vu le sectionnement de nombreux poteaux suite au choc de l'avion. Pourtant la structure ne s'est pas effondrée et a tenu grâce à son hyperstaticité pendant une heure environ. C'est un autre phénomène, lié à l'incendie, qui provoquera ensuite la ruine de la tour (cf. SI-C7).



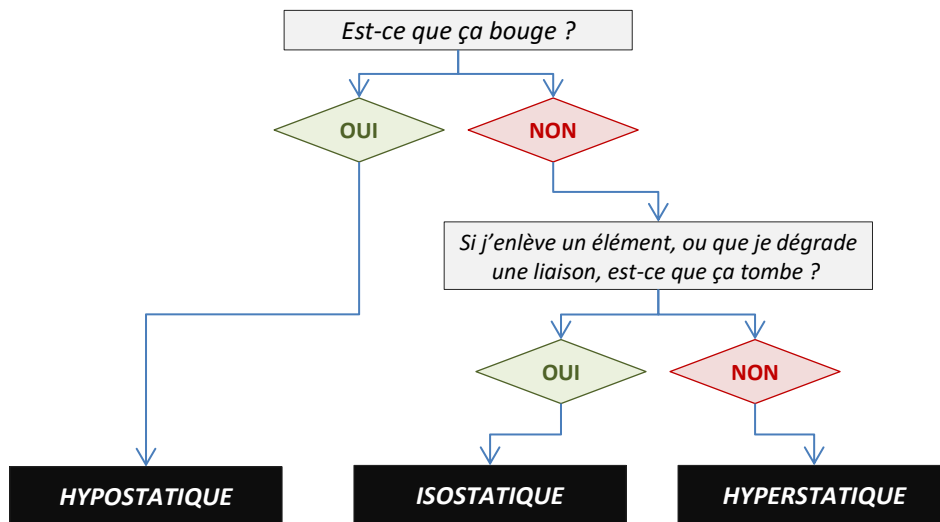
Adaptation d'un portique complexe à la ruine d'un de ses appuis

De nombreux poteaux ont été sectionnés dans le WTC mais la structure de la tour résiste pendant environ une heure grâce à son hyperstaticité
(source : <http://www.ara.com/>)



5.3.2 Calcul du degré de statiticité

Pour des structures simples on peut facilement deviner le degré de staticité.



Mais pour des structures plus complexes, ce raisonnement simple devient difficile : il faut alors **calculer le degré de staticité**. En deux dimensions, cela passe par la formule suivante (**cette partie est à connaître par cœur**) :

$$h = i - n \quad (\text{en 2D})$$

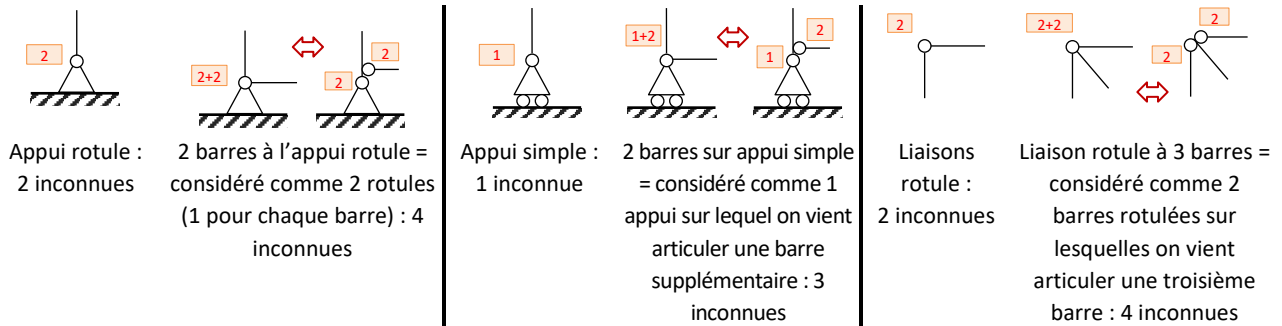
Avec :

i est le nombre d'inconnues statiques :

- l'**appui simple** empêche la translation verticale, on a donc **une inconnue** ;
- l'**articulation** empêche les deux translations, on a donc **deux inconnues** ;
- l'**encastrement** immobilise tout (les deux translations et la rotation), on a donc les **trois inconnues**.

Appui simple ou appui glissant	Rotule ou articulation	Encastrement
1 Translation verticale bloquée = 1 inconnue statique	1 Translation verticale bloquée +1 Translation horizontale bloquée = 2 inconnues statiques	1 Translation verticale bloquée +1 Translation horizontale bloquée + 1 Rotation en plan bloquée = 3 inconnues statiques

Attention ! - À une liaison que rejoignent plus de deux barres ou un appui sur plus d'une barre en simultané, il faut compter la rotule ou l'encastrement autant de fois en plus que de barres surnuméraires (cf. exemples).



n est le nombre d'équations :

Chaque barre permet de connaître trois équations :

(PFS sur les forces en X / PFS sur les forces en Y et PFS sur les moments)

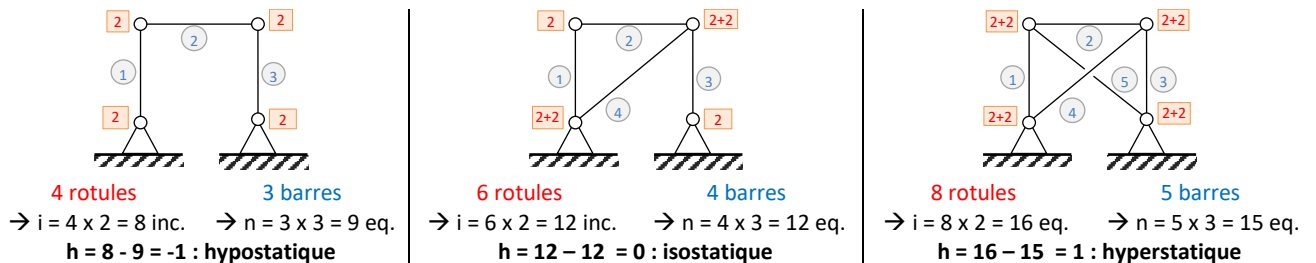
Le degré de staticité d'une structure permet d'en connaître la staticité :

$h < 0$: système hypostatique	$h = 0$: système isostatique	$h > 0$: système hyperstatique
Trop peu d'appuis ou trop de DDL Équilibre instable / mécanisme	Juste assez d'appuis et de DDL Équilibre stable / économies	Plus d'appuis que nécessaire ou pas assez de DDL Plusieurs équilibres stables / sécurité

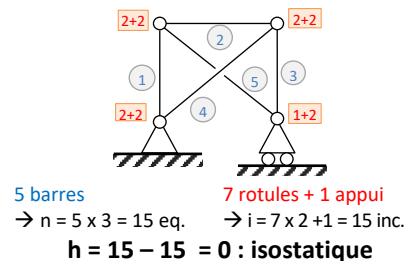
Cependant, si $h > 0$, cela veut dire qu'il y a plus d'inconnus que d'équations. Il sera donc très difficile de poursuivre l'analyse manuellement. Il faut pour les calculs à la main avoir une structure isostatique.

5.3.3 Exemples

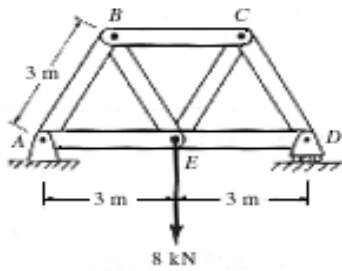
5.3.3.1 Les portiques



Sur le dernier exemple, qui est hyperstatique d'ordre 1, on peut retrouver l'isostaticité en rajoutant un degré de liberté :



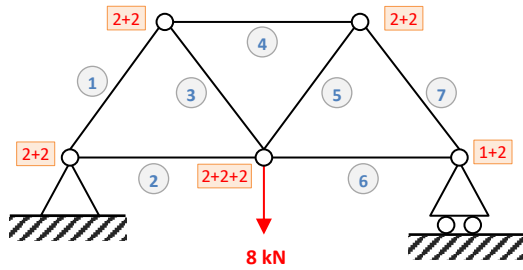
5.3.3.2 Pont treillis de type Warren



i est le nombre d'inconnues statiques :

- 1 appui simple = 1 x 1 inconnue
- 10 rotules = 10 x 2 inconnues
- 0 encastrement = 0 x 3 inconnues

$$i = 21 \text{ inconnues}$$



n est le nombre d'équations :

- 7 barres x 3 équations par barre

$$n = 21 \text{ équations}$$

Degré de staticité :

$$h = i - n = 21 - 21 = 0 : \text{isostatique}$$

5.3.3.3 La potence

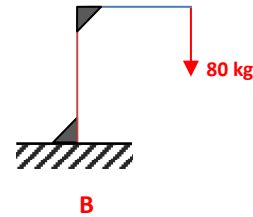
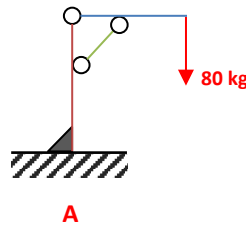


Schéma statique A

i est le nombre d'inconnues statiques :

- 0 appui simple = 0 x 1 inconnue
- 3 rotules = 3 x 2 inconnues
- 1 encastrement = 1 x 3 inconnues

$$i = 9 \text{ inconnues}$$

n est le nombre d'équations :

- 3 barres x 3 équations par barre

$$n = 9 \text{ équations}$$

Degré de staticité :

$$h = i - n = 9 - 9 = 0 : \text{isostatique}$$

Schéma statique B

i est le nombre d'inconnues statiques :

- 0 appui simple = 0 x 1 inconnue
- 0 rotules = 0 x 2 inconnues
- 2 encastrement = 2 x 3 inconnues

$$i = 6 \text{ inconnues}$$

n est le nombre d'équations :

- 2 barres x 3 équations par barre

$$n = 6 \text{ équations}$$

Degré de staticité :

$$h = i - n = 6 - 6 = 0 : \text{isostatique}$$

On trouve bien le même résultat (la potence est isostatique) quelle que soit la méthode de schématisation choisie.

EXERCICE D'APPLICATION : Le Pont du Forth

Le pont du Forth est le deuxième plus long pont ferroviaire de type cantilever au monde.

Cantilever veut dire « porte-à-faux » ou « console » en anglais. Cela signifie que le pont fonctionne en console à partir de chacune des piles (cf. illustration).

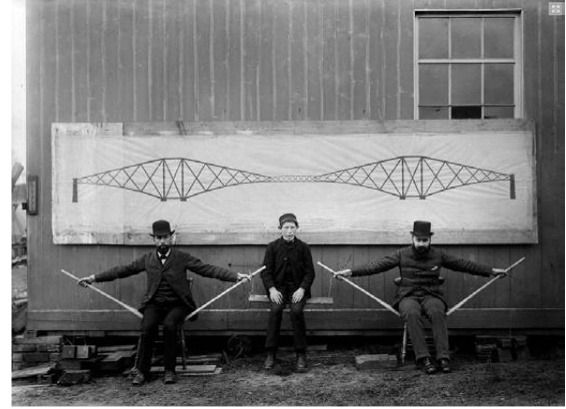
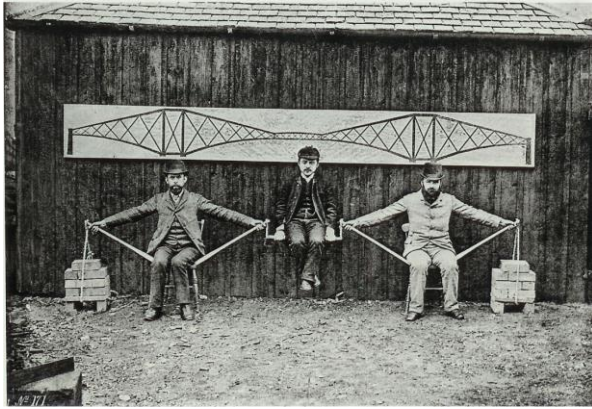
Il est long de plus de 2,5 kilomètres et inscrit sur la liste indicative du patrimoine mondial de l'UNESCO depuis 1999.

Les plans sont conçus entre 1880 et 1881 par deux ingénieurs britanniques : John Fowler et Benjamin Baker. A l'origine, le pont devait être réalisé par Thomas Bouch mais un ouragan détruisit en 1879 un autre pont de cet ingénieur anglais sur le Tay, provoquant la mort de 75 personnes. Le projet de pont suspendu de Bouch est alors abandonné.



L'homme au centre du dispositif ci-dessous est un japonais, **Kaichi Watanabe**, contremaître en chef du chantier (photo de gauche - 1890), il réalise une démonstration simplifiée du fonctionnement du pont pour le grand public.

Une présentation qu'il répète depuis de 1885 alors que le jeune Watanabe était encore étudiant en ingénierie à Glasgow (photo de droite).



Question :

Calculer le nombre de briques de chaque contrepoids.

Corrigé :

L'énoncé est extrêmement court et ne décompose pas le problème en plusieurs étapes.

C'est bien entendu volontaire. Il est très important de la comprendre la méthode et de savoir la reproduire tout seul.

Entraînez-vous à le faire autant que possible.

La façon dont est posée la question pousse à **se demander ce qu'on cherche**.

On est face à un problème très concret : Watanabe s'est probablement posé cette même question et l'aurait résolue avant de commencer son montage humain.

Le poids du tas de brique doit permettre au montage d'être en **équilibre**.

S'il n'y avait pas un tas de briques et si la corde était directement attachée au sol, alors la corde serait tendue et le sol réagirait à cette tension par une **réaction égale et opposée** (3^{ème} loi de Newton).

C'est la valeur de cette réaction que nous cherchons, car si nous mettons à la place le même poids de briques, alors le système sera en équilibre.

Identification du système

Le Pont du Forth est un pont en cantilever **symétrique**. Chaque pile reprend en porte-à-faux la moitié du poids du tablier, de façon complètement indépendante de l'autre pile.

Dans le modèle humain, cela signifie que la moitié du poids de Watanabe est repris par l'homme de gauche et l'autre moitié par l'homme de droite. Cela de manière indépendante.

Nous pouvons donc limiter l'étude au seul homme de gauche. Celui-ci reprend la moitié du poids de Watanabe. Supposons que ce dernier pèse 60 kg.

Identification des éléments

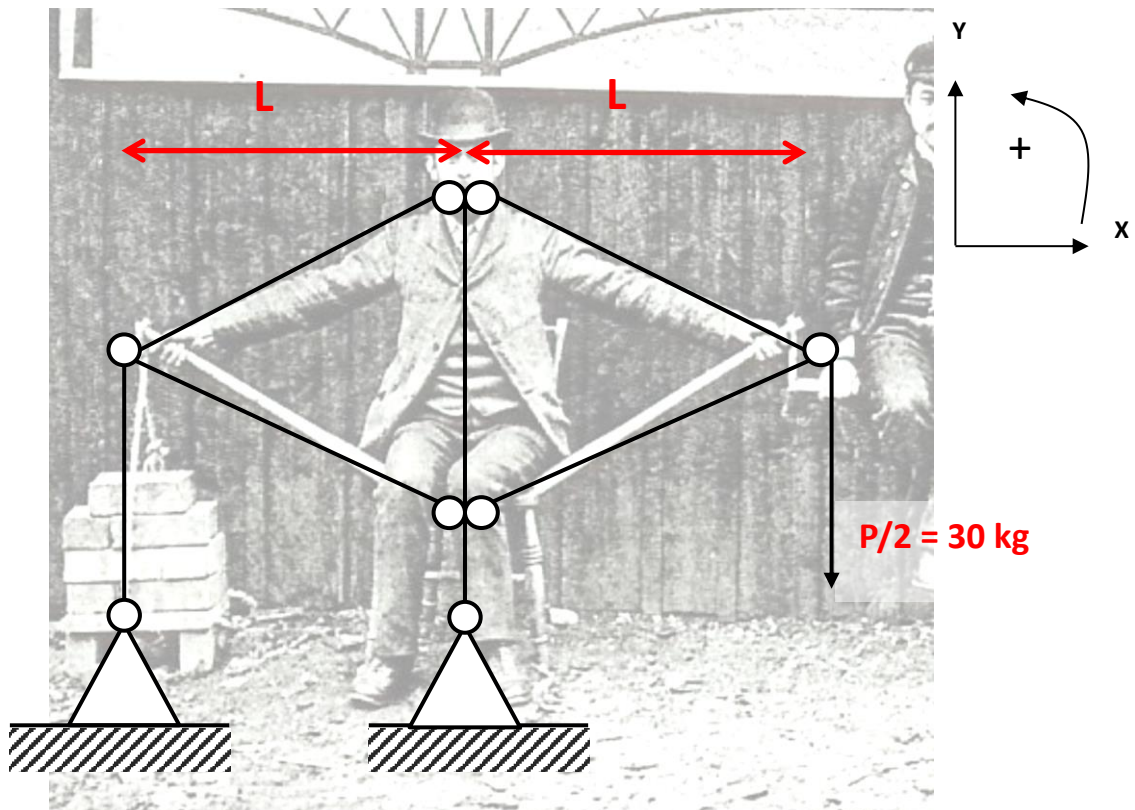
- Les éléments épais, les barres de bois, travaillent en **compression** : ce sont des **étais**.
- Les bras des hommes sont **tendus**, ainsi que la corde reliant le bras au contrepoids : ce sont des **tirants**.
- La charge est reportée sur les épaules via les bras de l'homme puis transite par sa colonne vertébrale jusqu'au sol (disons que le sol est représenté par la chaise sur laquelle il est assis). La colonne vertébrale est donc en **compression**, c'est un **poteau**.

Identification des liaisons et appuis

Les bras et les tiges de bois sont libres de tourner : ils sont **articulés** sur le corps de l'homme qui, lui, est articulé au sol (s'il était encastré, le contrepoids serait inutile pour l'équilibre externe).

Le contrepoids est relié à la main de l'homme par une corde : elle est forcément **articulée** de chaque côté, étant donné qu'il est impossible de bloquer la rotation d'un élément souple (sans rigidité).

Schéma statique



Degré d'hyperstaticité :

$$h = i - n$$

- Inconnues i : 9 Rotules : $i = 9 * 2 = 18$ inconnues
- Equations n : Nombre de barres : 6 (le poteau central n'est pas interrompu)
Donc $n = 6 * 3 = 18$ équations

$$h = i - n = 18 - 18 = 0 : \text{isostatique}$$

Analyse structurale :

Dans un pont ferroviaire, on peut considérer que:

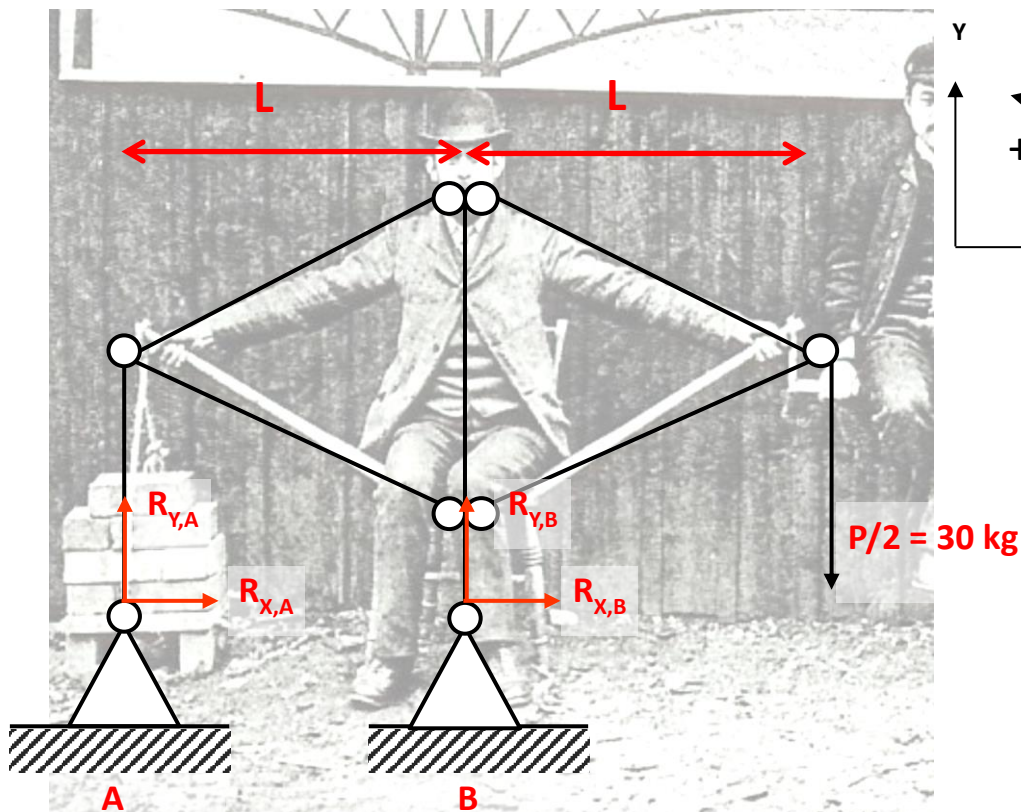
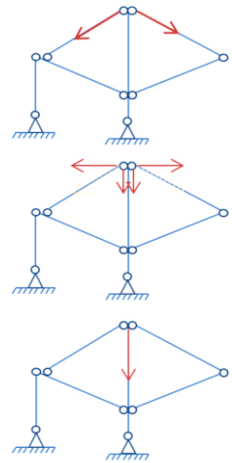
- **G = structure métallique**
- **G' = hourdis, rails, ect.**
- **Q = trains**

Ici le poids propre du pont, représenté par le corps de l'homme, est également équilibré de chaque côté de la pile (par symétrie) : comme sur une balance en équilibre, il ne génère pas de moment renversant sur la pile.

Les composantes horizontales s'annulent et les verticales s'additionnent.

Pour le calcul du contrepois, c'est donc le poids de Watanabe qui importe (les réactions horizontales des structures sont admises comme étant nulles).

Analyse structurale sous poids propre



Equation de la résultante statique – On applique le PFS sur les forces projetées en Y :

A effectuer en premier car c'est la plus simple. En grandeurs :

$$\frac{P}{2} - R_{Y,A} - R_{Y,B} = 0$$

Donc

$$R_{Y,A} + R_{Y,B} = \frac{P}{2}$$

Equation du moment statique – On applique le PFS sur les moments à partir du point B :

On a deux inconnues ($R_{Y,A}$ et $R_{Y,B}$) et encore qu'une équation ($R_{Y,A} + R_{Y,B} = \frac{P}{2}$).

On applique l'équation au point B, au pied de la pile. En effet, cela nous permet d'éliminer une inconnue : R_B ce qui est logique car on recherche R_A . Sens positif : antihoraire.

Moment calculé en **B** de la force $R_{Y,A}$ (négative car tend à faire tourner dans le sens horaire autour de **B**).

$$M_{R_{Y,A}/B} = -R_{Y,A} * L$$

Moment calculé en **B** de la force $R_{Y,B}$ (nulle car bras de levier nul).

$$M_{R_{Y,B}/B} = R_{Y,B} * 0 = 0$$

De même, les moments calculés en **B** des forces $R_{X,A}$ et $R_{X,B}$ sont nul (car bras de levier nul).

$$M_{R_{X,A}/B} = M_{R_{X,B}/B} = 0$$

Moment calculé en **B** de la force $P/2$ (négative car tend à faire tourner dans le sens horaire autour de **B**).

$$M_{P/B} = -\frac{P}{2} * L$$

Or d'après le PFS :

$$M_{R_{X,A}/B} + M_{R_{Y,A}/B} + M_{R_{X,B}/B} + M_{R_{Y,B}/B} + M_{P/B} = 0$$

Donc :

$$0 - R_{Y,A} * L + 0 + 0 - \frac{P}{2} * L = 0$$

Soit :

$$R_{Y,A} = -\frac{P}{2} = -30 \text{ kg}$$

A ce stade, il est intéressant de faire trois remarques :

- 1) La réaction au point **A** est négative. Cela veut dire que le sol réagit « vers le bas ». Ce qui prouve qu'il est sollicité par une traction (celle du câble) et non par une compression.
- 2) L'équation du moment en **B** était suffisante pour trouver la valeur de la réaction recherchée !

En effet, nous n'avons pas utilisé la première relation trouvée :

$$R_{Y,A} + R_{Y,B} = \frac{P}{2}$$

- 3) Cependant, cela n'est pas inutile car connaissant cette équation et sachant que :

$$R_{Y,A} = -30 \text{ kg}$$

On en déduit :

$$-\frac{P}{2} + R_{Y,B} = P/2$$

Donc :

$$R_{Y,B} = P = 60 \text{ kg}$$

C'est intéressant car cela montre qu'un tel système de pont équilibré par des contrepoids augmente la charge de compression que doit reprendre la pile.

En effet la pile doit ici reprendre 60 kg alors que la moitié du poids de Watanabe n'était que de 30 kg !

C'est le prix à payer pour un obtenir simplement l'équilibre en basculement.

Calcul du nombre de briques

En conclusion, pour connaître le nombre de briques nécessaires à l'expérience, il faut connaître la masse d'une brique (2,66 kg).

La tension du câble valant :

$$R_A = -30 \text{ kg}$$

Il faudra donc $30/2,66 = 11,27$ soit **12 briques**.

Sur la photo on compte 13 briques, sachant que Watanabe pesait probablement plus de 60 kg, il y avait très peu de marge d'erreur dans l'expérience.

Ce qui tend à penser que Watanabe s'était en effet posé la question avant. On ne saura pas en revanche s'il l'a vraiment calculé ou résolu empiriquement.