

CM : **STRUCTURE 2**

CYCLE LICENCE S3/S4

Marc LEYRAL – Sylvain EBODE

Buckminster Fuller devant la Biosphère de Montréal, crédit photo : BETTMANN/CORBIS



S2-C9

LES DÔMES GÉODÉSIQUES

Découverte d'une famille originale de dômes

Indice C

ECHAUFFEMENT

Chaque cours commence par un petit exercice d'échauffement, afin de rendre ludique l'usage des mathématiques et de la logique

On a effacé les signes !

Trouvez les opérateurs manquants pour rendre ces calculs justes :

$$1 \quad 1 \quad 1 = 6$$

$$2 \quad 2 \quad 2 = 6$$

$$3 \quad 3 \quad 3 = 6$$

$$4 \quad 4 \quad 4 = 6$$

$$5 \quad 5 \quad 5 = 6$$

$$6 \quad 6 \quad 6 = 6$$

$$7 \quad 7 \quad 7 = 6$$

$$8 \quad 8 \quad 8 = 6$$

$$9 \quad 9 \quad 9 = 6$$

$$9 = 6 \wedge - (6 \times 6) \wedge$$

$$9 = ((8 + 8) \wedge) \wedge - 8$$

$$7 - 7 / 7 - 7$$

$$6 - 6 + 6 - 6$$

$$5 + 5 / 5 = 6$$

$$\sqrt{4} + \sqrt{4} + \sqrt{4} = 6$$

$$3 \times 3 - 3 = 6$$

$$2 + 2 + 2 = 6$$

$$(1 + 1 + 1)! = 6$$

Par exemple :

Réponse :

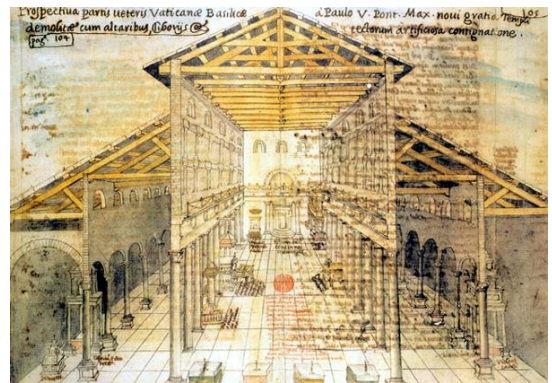
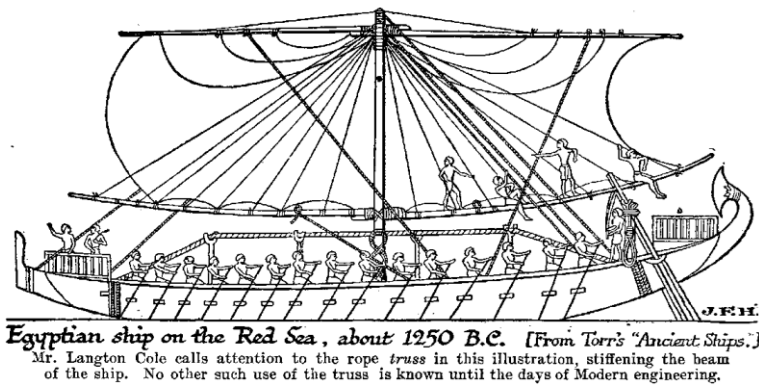
Rappels de cours (S1-C8 - Les systèmes réticulés et S2-C7 - Les arcs, les voûtes et les dômes)

LES SYSTÈMES RÉTICULÉS

Petit historique des treillis

Étymologie : En anglais, treillis se dit *truss*, du vieux français *trousse* (« faisceau de choses liées ensemble »)

- Les Égyptiens en réalisaient avec des cordages sur leurs long bateaux **dès 1250 avant JC** pour ne pas qu'ils fléchissent sous le poids de l'équipage et du chargement.
- Il faudra ensuite attendre l'ère romaine pour revoir l'apparition de treillis en bois dans la réalisation des charpentes (ci-dessous : Charpente de l'ancienne basilique Saint-Pierre de Rome, édiflée en 330 après Jésus-Christ) .



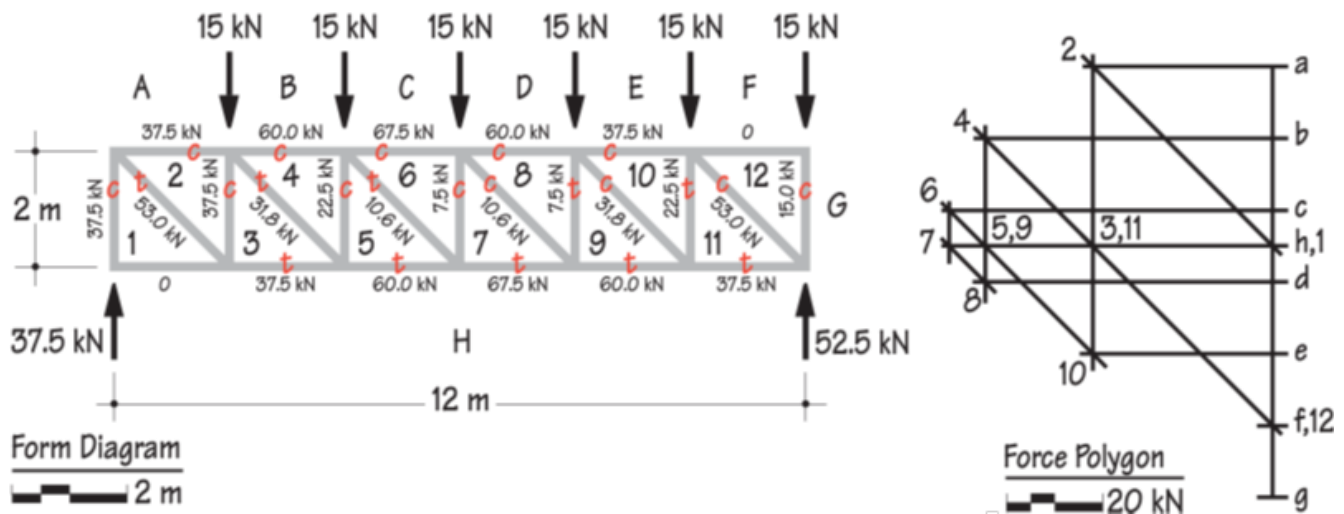
Fonctionnement :

- Un treillis est **une structure réticulée** plane ou tridimensionnelle constituée de barres
- Elle est dite réticulée lorsque tous les organes de liaisons sont des **rotules**.
- De ce fait, les barres travaillent uniquement en **compression** et en **traction**
- Pour être auto-stable, les constructions treillis doivent être constituées de **triangles**
- La forme optimum pour une répartition idéale des efforts est le treillis constitué de **triangles isocèles rectangles**



Trois méthodes pour le calcul :

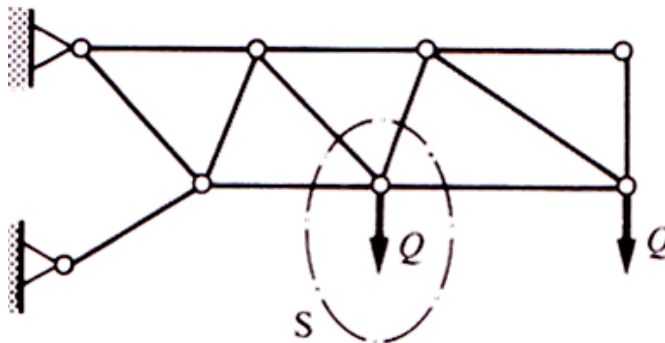
1 – Méthode Graphique (Bow, Cremona) :



2 – Méthode des nœuds :

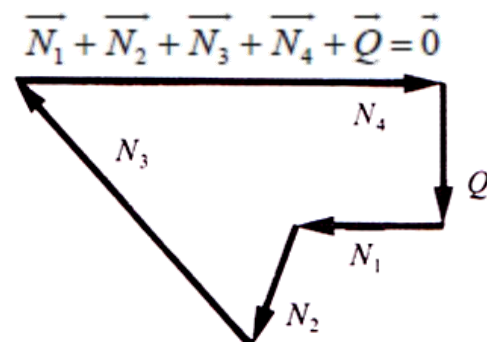
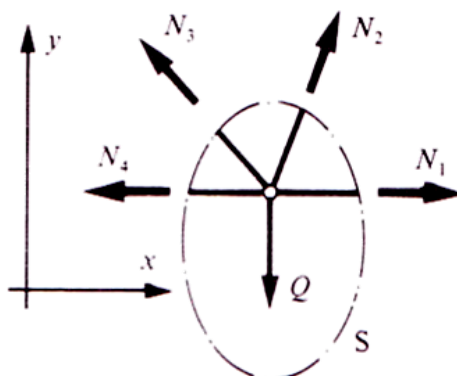
- Étape 1 : isoler le nœud
- Étape 2 : indiquer les forces des barres
- Étape 3 : trouver les forces analytiquement ou graphiquement

Étape 1 : isoler le nœud



Étape 2 : indiquer les forces des barres

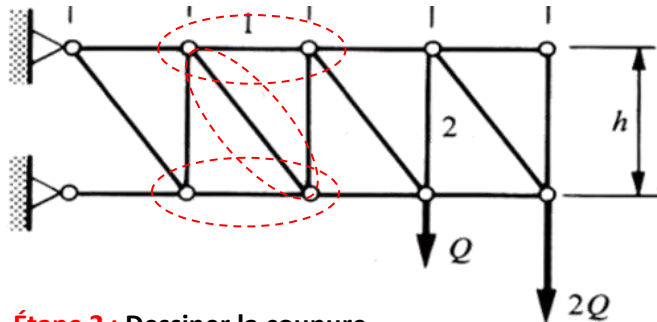
Étape 3 : trouver les forces analytiquement ou graphiquement



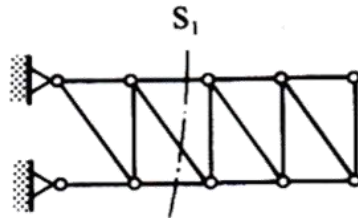
3 – Méthode de la section de Ritter :

- Étape 1 : Choisir les barres
- Étape 2 : Dessiner la coupure
- Étape 3 : trouver les forces

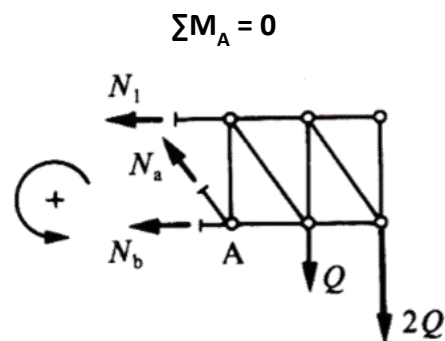
Étape 1 : Choisir les barres



Étape 2 : Dessiner la coupure



Étape 3 : trouver les forces



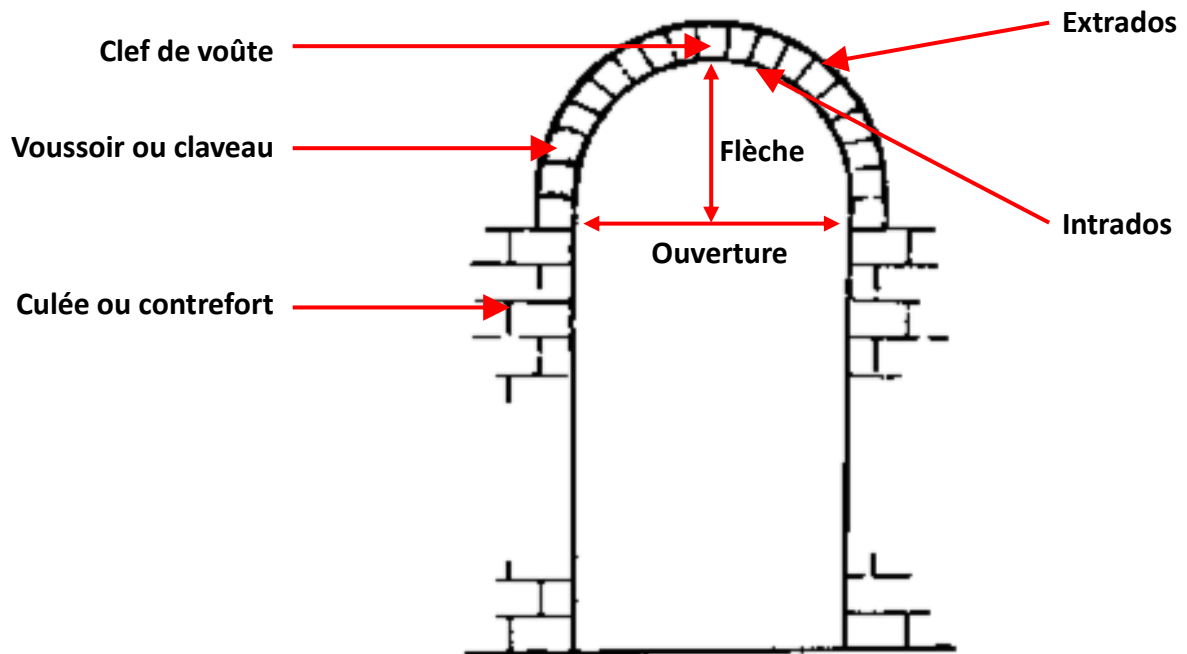
Les différents types de treillis :

Fermes (nombreuses familles existantes) — Compression — Traction	Treillis de type Town simple	Treillis de type Town double
Treillis de type Pratt	Treillis de type Howe	Treillis de type Warren sans montants
Treillis de type Warren avec montants	Treillis de type Fink	Treillis de type Bollman

LES ARCS

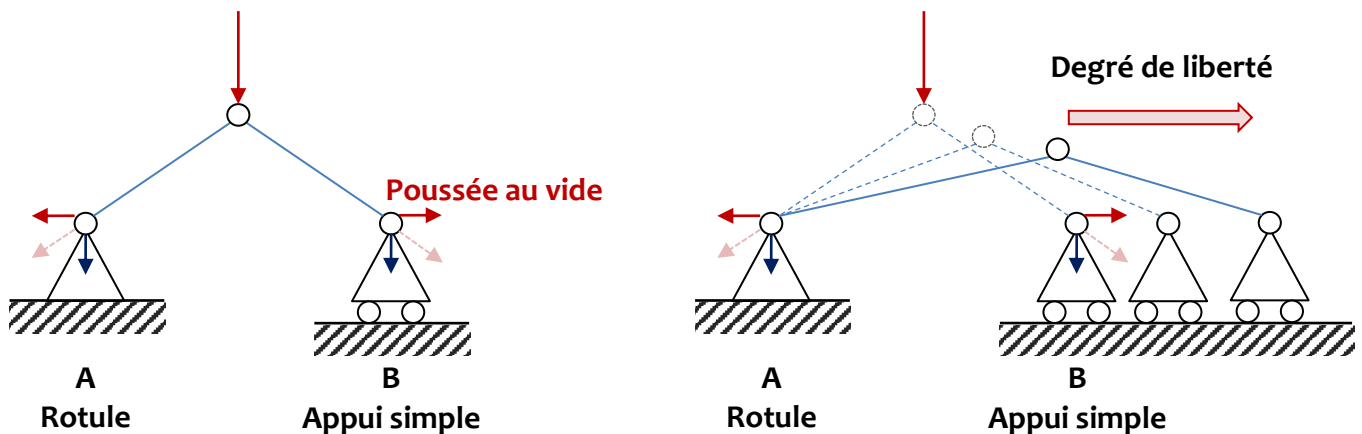
Définition :

Un arc est un élément plan et courbe (ou en morceaux de courbes) destiné à franchir un espace et reposant sur deux points d'appui.



La poussée au vide :

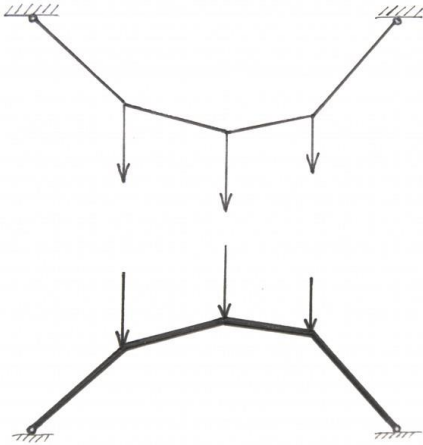
Les charges descendent au sol via un **effort normal**. À l'appuis, celui-ci se décompose en la somme d'une **composante verticale** reprise par le support et d'une **horizontale** : la **poussée au vide**.



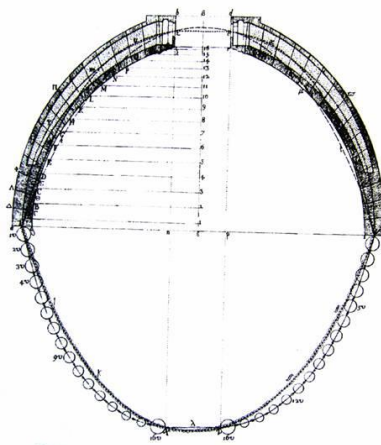
Fonctionnement :

S'ils suivent une forme idéale, appelée **funiculaire des forces**, les arcs fonctionnent en **compression**. Il faut donc vérifier le **flambement**.

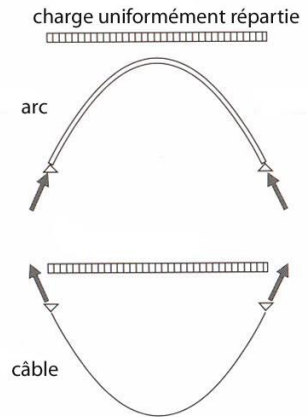
Principe de la chaînette inversée



Croquis de Polemi (St Pierre de Rome)



Application



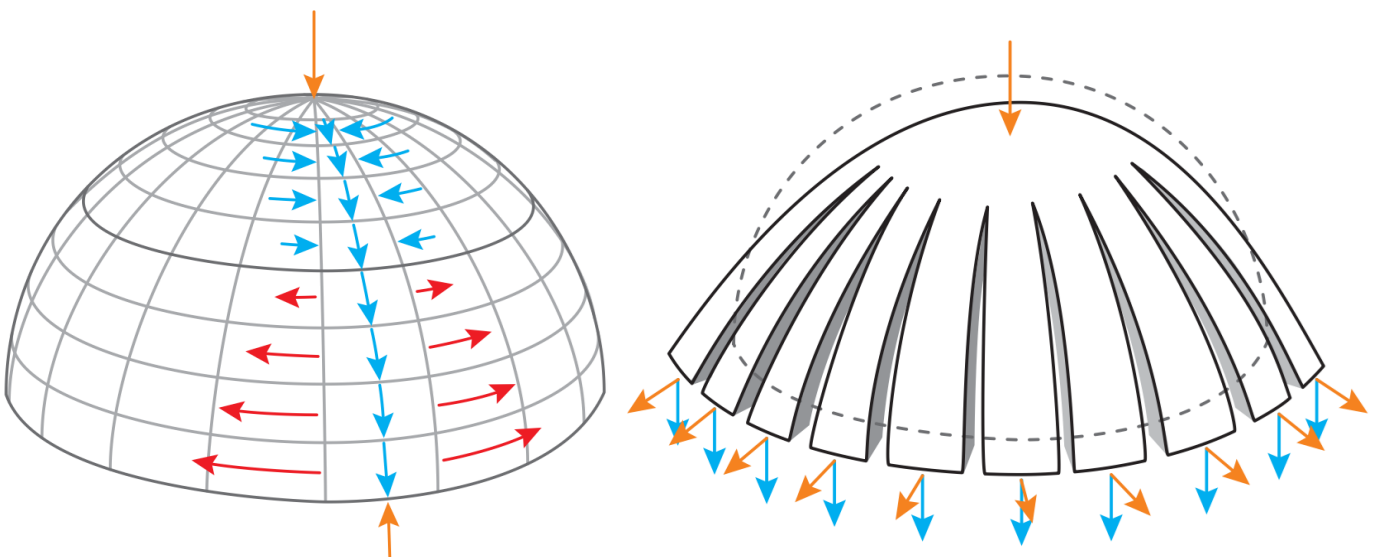
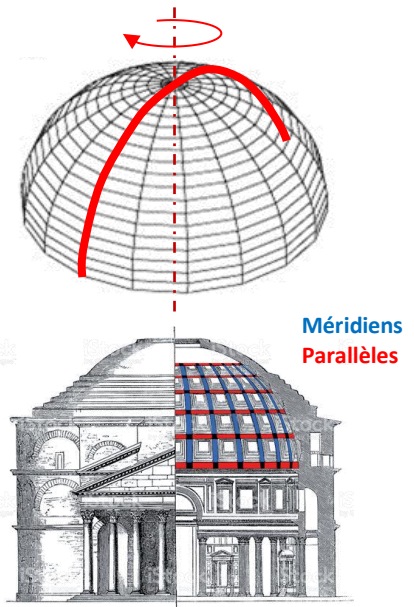
LES DOMES

Définition :

Un **dôme** est une voûte, dont la surface est générée par la **rotation** d'un arc autour de son axe central.

Fonctionnement :

- Les méridiens sont en compression
- Les parallèles au-dessus d'un angle de 50° à 60° sont comprimés et celles du dessous tendues.



Sommaire du cours

SOMMAIRE DU COURS	8
9 LES DOMES GEODESIQUES	9
9.1 Histoire des dômes géodésiques	9
9.1.1 Buckminster Fuller	9
9.1.2 Les dômes géodésiques	10
9.2 Fonctionnement	10
9.2.1 Analogies avec la nature	10
9.2.2 Les géodésiques	10
9.2.3 Triangles équilatéraux	11
9.3 Réalisation	14
9.3.1 Solides de Platon	14
9.3.2 Triangularisation	14
9.3.2.1 Paramètres de triangularisation	14
9.3.2.2 Etapes de la triangularisation	15
9.3.3 Projection	16
9.3.4 Construction	16

9 Les dômes géodésiques

9.1 Histoire des dômes géodésiques

9.1.1 Buckminster Fuller

Incontestablement un des personnages les plus singuliers de l'histoire des bâtisseurs, Buckminster Fuller est un architecte et un inventeur américain qui a vécu de 1895 à 1983. On lui associe souvent les adjectifs futuriste, visionnaire et inventeur.

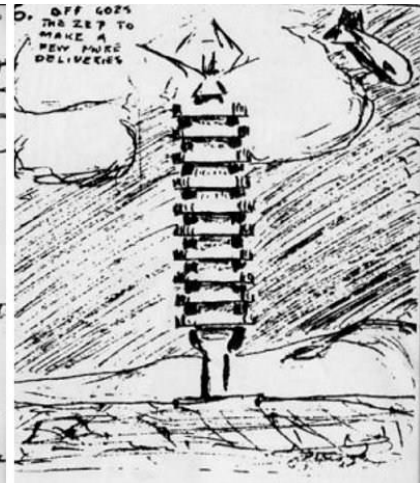
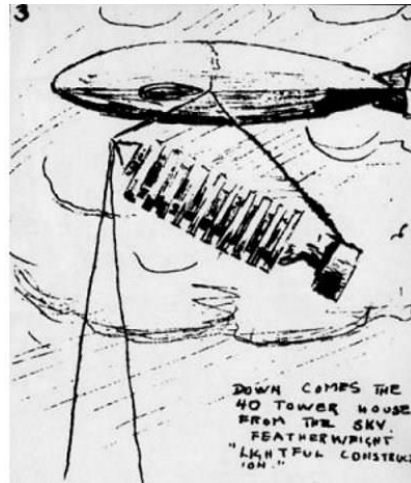
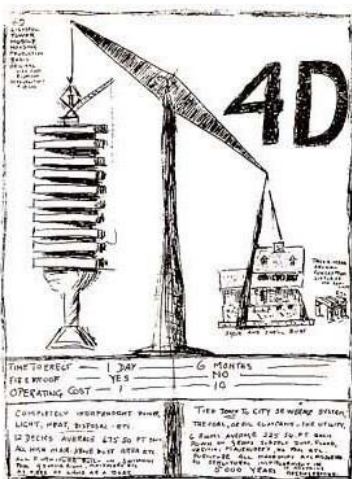
Le génie de Buckminster Fuller allait bien au-delà de ce qui pouvait être réalisé. Par exemple, dès 1960, il planifiait de couvrir... Manhattan ! Grâce à un dôme géodésique gigantesque, il voulait réduire la pollution aérienne de la ville et en réguler le climat.

Avec ses folles inventions, Buckminster Fuller voulait changer le monde, l'améliorer pour le bien de l'humanité entière.



Il s'inscrit ainsi dans le sillage de l'architecture utopique d'Archigram ou du projet hypothétique Broadacre City de Frank Lloyd Wright. Mais si on retrouve des points communs entre ces personnages, Fuller reste bien singulier. En effet, Archigram n'a jamais construit, Fuller si. Wright a beaucoup construit mais souvent (pas toujours) dans un style plus classique et moins futuriste que Fuller.

Un exemple du génie « irréaliste » de Fuller est la tour 4D, un ensemble de 12 étages, sensée pouvoir être construite par un seul homme en un seul jour, tout en ayant de grandes qualités écologiques.



9.1.2 Les dômes géodésiques

En 1967, le Canada organise l'Exposition Universelle à Montréal.

Buckminster Fuller réalise le pavillon des Etats-Unis à travers un fantastique dôme géodésique (forme géométrique : une géode). Une technique dont il est majoritairement l'inventeur.

Ce type d'édifice met clairement en avant sa structure, qui le compose à 75%.

Ce dôme, qui abrite aujourd'hui la Biosphère, est la plus grande réalisation géodésique du monde. Elle fait 76 mètres de diamètre.



Toutefois, il est important de préciser que si Buckminster Fuller a énormément travaillé sur le concept de la géodésie au point que beaucoup lui en accorde la paternité, comme en atteste ce timbre à son effigie, la toute première **géode** (synonyme de dôme géodésique) date de 1922 et est l'œuvre de **Walther Bauersfeld** qui devait abriter un planétarium pour la Zeiss Optical Company à Jena.



9.2 Fonctionnement

9.2.1 Analogies avec la nature



Buckminster Fuller est un grand connaisseur de la **nature**. Même si nous ne savons pas si c'est cet exemple qui lui fit penser à la géodésie, le concept est assez proche de celui d'une **bulle de savon**.

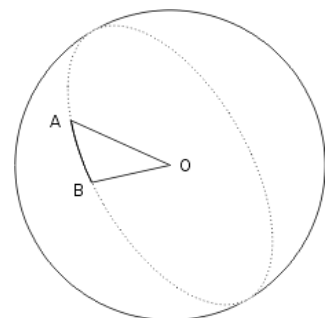
Une bulle de savon est toujours ronde car elle suit un principe inaltérable dans la nature : **chaque équilibre naturel vise à minimiser l'énergie du système**. En termes plus vulgaires, la nature est fainéante : elle veut dépenser le moins d'énergie possible.

9.2.2 Les géodésiques

Pour s'inspirer de la bulle de savon, et donc chercher à minimiser les énergies afin d'atteindre des équilibres les plus efficaces possibles, il faut savoir répondre à cette question : **quel est le chemin le plus court entre deux points A et B sur une sphère ?**

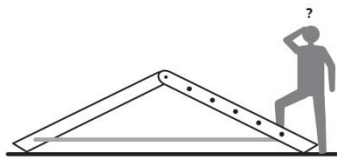
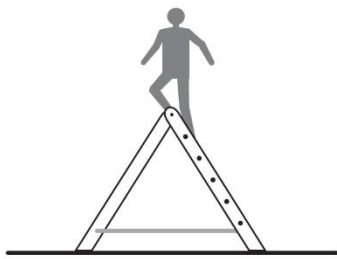
Réponse : il s'agit d'un cercle dont le centre est confondu avec celui de la sphère et qui passe par A et B. On l'appelle le grand cercle qui passe par A et B. On peut simplement dire qu'il s'agit d'une géodésique de la sphère.

Buckminster Fuller a eu le sentiment que pour transmettre une force de A à B, le chemin qui requiert le moins d'énergie est celui qui suit la géodésique.



9.2.3 Triangles équilatéraux

Source : <https://www.civilax.com/analysis-dome-structure-in-sap2000/>



NOTRE CERVEAU NOUS DÉCONSEILLE DE MONTER SUR UN ESCABEAU TRÈS PLAT.

Mais tout ne fonctionna pas comme prévu. Des triangles quelconques et inégaux ont une raideur en flexion assez faible, ou en tout cas non optimale.

Prenons par exemple un escabeau. Sa forme équilatérale assure une bonne raideur en flexion. Mais si on imagine une version plus aplatie, il semble évident que le l'escabeau résistera à une charge beaucoup plus faible. Prouvons-le.

On applique une force 100 kg en haut d'un escabeau qui a deux pieds et un tirant sous forme de triangle équilatéral. Les pieds sont comprimés et le tirant en traction.

Calculons les efforts internes dans les barres.

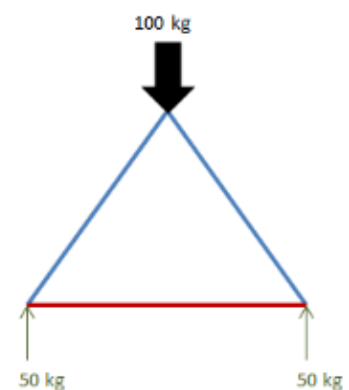
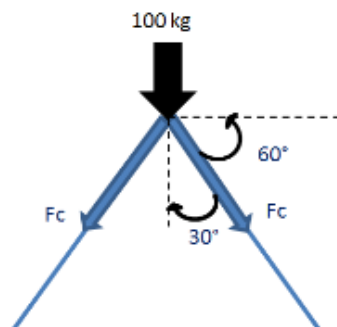
Étape 1 : évaluation des réactions à la base des deux pieds.

Le problème étant symétrique, les réactions sont donc identiques et égales à la moitié de la charge, donc 50 kg.

Étape 2 : évaluation de la force de compression dans chacun des pieds.

On applique la méthode analytique vue avec les treillis.

Tout d'abord on isole le nœud du haut.



Les deux forces de compression sont identiques car le problème est symétrique. On les appelle F_c .

Le Principe Fondamental de la Statique sur les forces en Y nous permet de déterminer F_c :

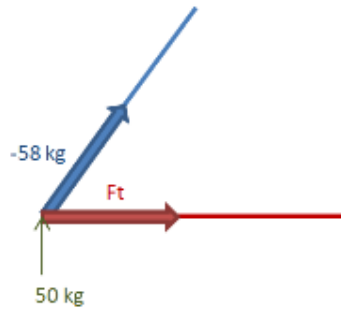
$$100kg + 2 * F_c * \cos(30^\circ) = 0$$

Donc :

$$F_c = -\frac{100}{2 * \cos(30^\circ)} = -58kg$$

Étape 3 : évaluation de la force de traction dans le tirant.

On isole le nœud à la base d'un des deux pieds.



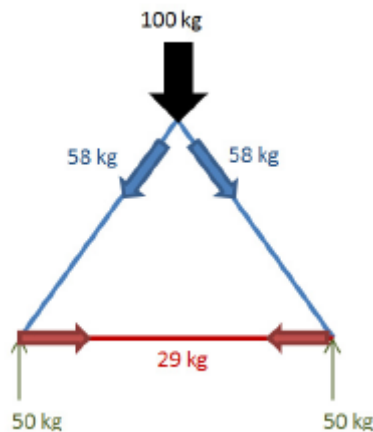
On applique le Principe Fondamental de la Statique sur les forces en X :

$$F_t - 58kg * \cos(60^\circ) = 0$$

Donc

$$F_t = 58kg * \cos(60^\circ) = 29kg$$

BILAN :



Maintenant, imaginons un escabeau aplati de moitié.

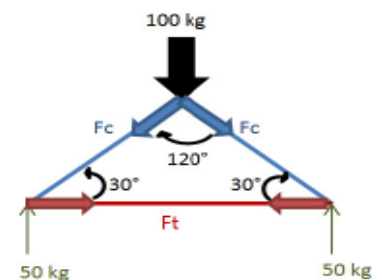
Calculons les efforts internes dans les barres.

Étape 1 : évaluation des réactions à la base des deux pieds.

Le problème étant symétrique, les réactions sont donc identiques et égales à la moitié de la charge, donc 50 kg.

Étape 2 : évaluation de la force de compression dans chacun des pieds.

On isole le nœud du haut.



Le Principe Fondamental de la Statique sur les forces en Y nous permet de déterminer F_c :

$$100kg + 2 * F_c * \cos(60^\circ) = 0$$

Donc :

$$F_c = -\frac{100}{2 * \cos(60^\circ)} = -100kg$$

Étape 3 : évaluation de la force de traction dans le tirant.

On isole le nœud à la base d'un des deux pieds.

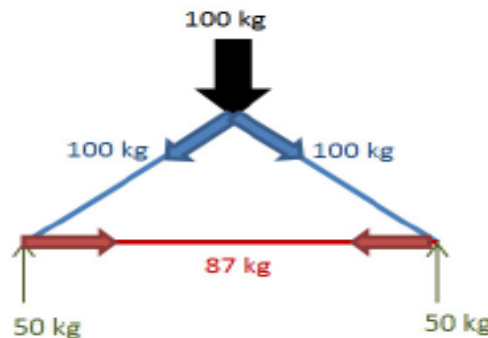
On applique le Principe Fondamental de la Statique sur les forces en X :

$$F_t - 100kg * \cos(30^\circ) = 0$$

Donc

$$F_t = 100kg * \cos(30^\circ) = 87kg$$

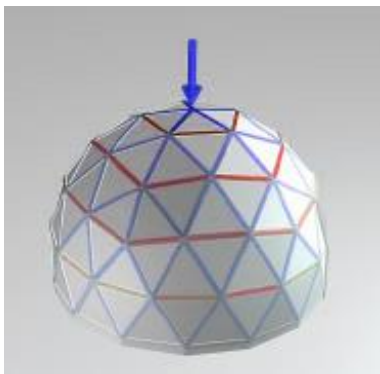
BILAN :



Conclusion :

Source : <https://www.civilax.com/analysis-dome-structure-in-sap2000/>

Les efforts sont beaucoup plus importants. Voilà pourquoi l'escabeau aplati risque de céder beaucoup plus vite. Ce résultat ne devrait pas surprendre le lecteur puisqu'il a déjà été vu que, pour augmenter la raideur en flexion, il faut éloigner la matière comprimée de la matière tendue afin d'augmenter le bras de levier et donc le moment résistant. L'escabeau fonctionne comme un arc très simplifié avec seulement deux voussoirs. Le triangle équilatéral éloignant le plus la matière, il est évidemment plus raide.



La deuxième idée de Fuller est donc de connecter les géodésiques en **triangularisant la sphère** avec des triangles les plus proches possible de **triangles équilatéraux**.

Ainsi, sous une charge ponctuelle, chaque triangle va marcher comme notre escabeau. Deux barres vont se comprimer et mettre la dernière en tension.

En fonctionnant ainsi, les barres en compression forment des cercles dont le centre est aussi le centre de la sphère : ce sont des **géodésiques**.

Les barres en traction forment des cercles qui les cintrrent, ces cercles sont parallèles entre eux.

Remarque : Si on prenait un triangle encore plus « haut » qu'un triangle équilatéral, celui-ci pourrait être plus rigide encore. Cependant, on ne sait pas d'où vient la charge. Sur le schéma, elle vient du haut. Mais si le vent se lève, la charge peut venir de côté. Alors les triangles fonctionneront différemment, sur un autre côté. L'unique configuration assurant un bon fonctionnement quelle que soit le sens la force correspond donc à une triangularisation avec trois angles égaux, donc avec des triangles équilatéraux.

9.3 Réalisation

Réaliser une sphère en la triangularisant avec des triangles parfaitement équilatéraux est impossible.

En revanche, le faire avec des triangles presque équilatéraux est faisable.

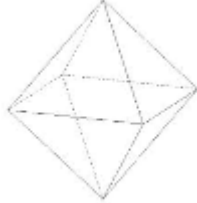
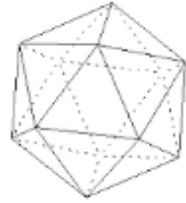
Cependant, les triangles des géodes sont un tout petit peu différents les uns des autres. Même si ces différences sont minimales, il faudra malgré tout réaliser le dôme avec des barres légèrement inégales, ce qui ne simplifie pas la construction.

9.3.1 Solides de Platon

Le principe à la base de la réalisation d'une géode consiste à **projeter les bords d'un solide connu sur la sphère**. Il faut aussi partir d'un solide dont toutes les faces sont identiques et régulières, c'est-à-dire équilatérales, et dont tous ses sommets ont le même nombre d'arêtes convergentes.

Nous connaissons tous les solides qui répondent à ces critères depuis très longtemps. Ils sont **appelés solides de Platon** et sont au nombre de 3.

Nous les identifions par le paramètre ***N*** qui définit le nombre de faces se rejoignant à un même sommet :

Le tétraèdre régulier : 4 côtés, <i>N</i> = III	L'octaèdre régulier : 8 côtés, <i>N</i> = IV	L'icosaèdre régulier : 20 côtés, <i>N</i> = V
		

La Biosphère de Fuller a été réalisée à partir d'un icosaèdre régulier. En effet, son nombre important de faces permet d'aboutir à un dôme visuellement plus régulier. Nous utiliserons donc ce solide de base comme exemple de ce cours.

9.3.2 Triangularisation

9.3.2.1 Paramètres de triangularisation

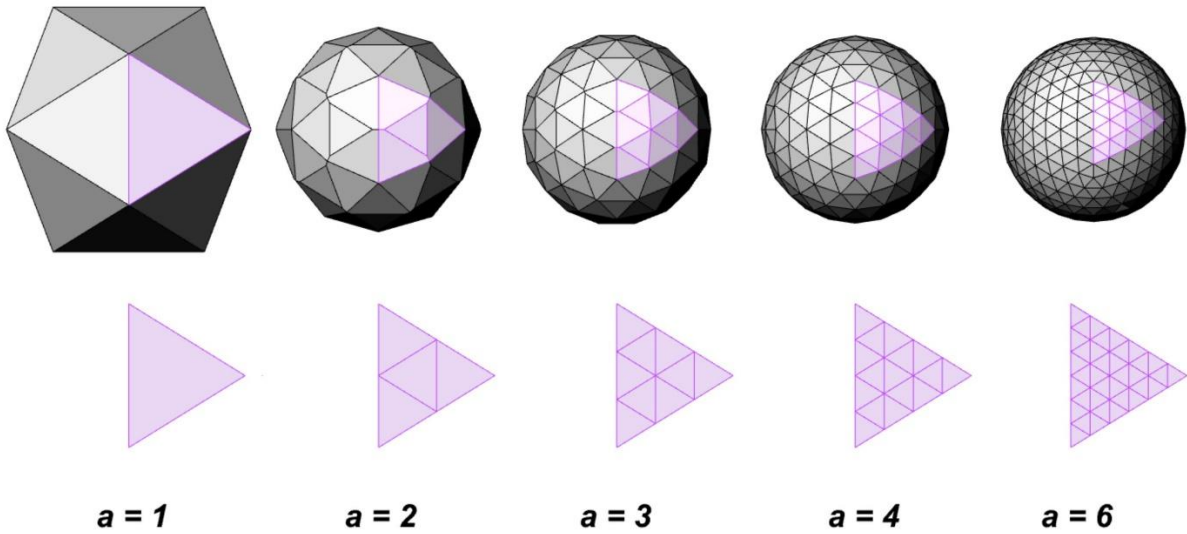
La triangularisation utilise deux paramètres de division ***a*** et ***b***.

Ainsi une géode est définie par un triptyque ***N-a-b***. Par exemple, une géode ayant pour solide de base l'icosaèdre (***N*** = V), divisé selon ***a*** = 7 et ***b*** = 3 sera identifiée selon la dénomination **Géode V-7-3**.

- ***a*** doit être en entier positif
- ***b*** doit être un entier compris dans [0 ; ***a***[

Les paramètres ***a*** et ***b*** servent à diviser les faces de l'icosaèdre afin de créer encore plus de triangles.

La méthode de division n'utilise que les paramètres ***a*** et ***b***.



9.3.2.2 Etapes de la triangularisation

Étape 1 : nous choisissons une face du solide de base et nous nommons les sommets A, B et C :

Étape 2 : l'arrête AB est subdivisée en $a+b$ segments. Les points sont numérotés de 0 au sommet A, jusqu'à $a+b$ au sommet B :

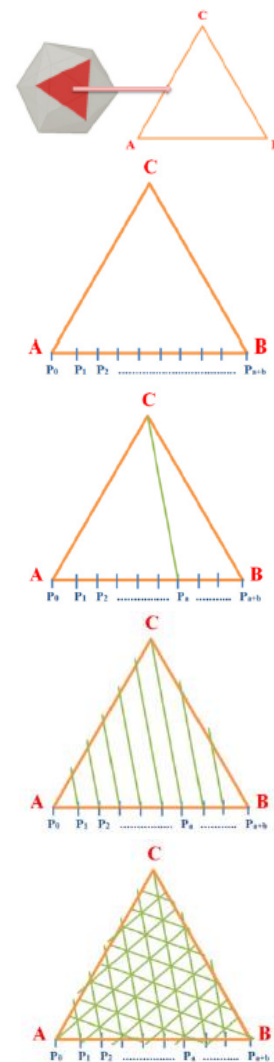
Étape 3 : le point C est relié au point P_a :

Étape 4 : nous traçons les parallèles au segment CP_a passant par chacun des points $P_0 P_1 \dots P_{a+b}$:

Étape 5 : les étapes 2 à 4 sont réitérées sur les arrêtes BC et AC :

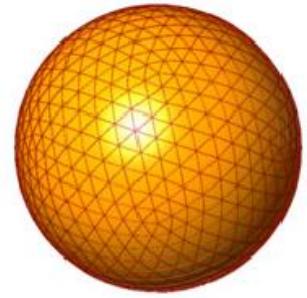


Ensuite, il suffit de reproduire ces opérations sur toutes les faces de l'icosaèdre.



9.3.3 Projection

La dernière étape de la réalisation consiste à projeter la triangularisation sur la sphère par une **projection centrale** dont le centre de projection est confondu avec le centre de la sphère.



9.3.4 Construction

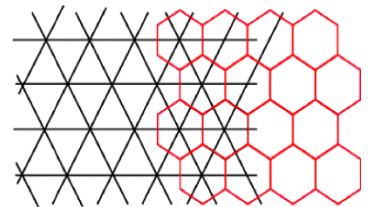
Évidemment, il est trop coûteux de réaliser des barres courbes.

On utilise donc des barres droites ce qui explique que le dôme géodésique a un aspect facetté.

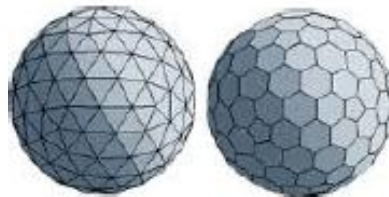
Également, pour que notre calcul du escabeau soit correct, il faut respecter l'hypothèse de base : comme pour un treillis, toutes les barres du dôme géodésique doivent être **réticulées** (reliées entre elles par des rotules) afin de ne pas transmettre de moments.



Enfin, comme nous l'avons vu pour les murs-rideaux sous-tendus avec des câbles, une deuxième couche peut être rajoutée, telle une deuxième peau sur un oignon, afin de donner plus de raideur à la façade. Elle réalisée sur la géométrie du **dual** du dôme.



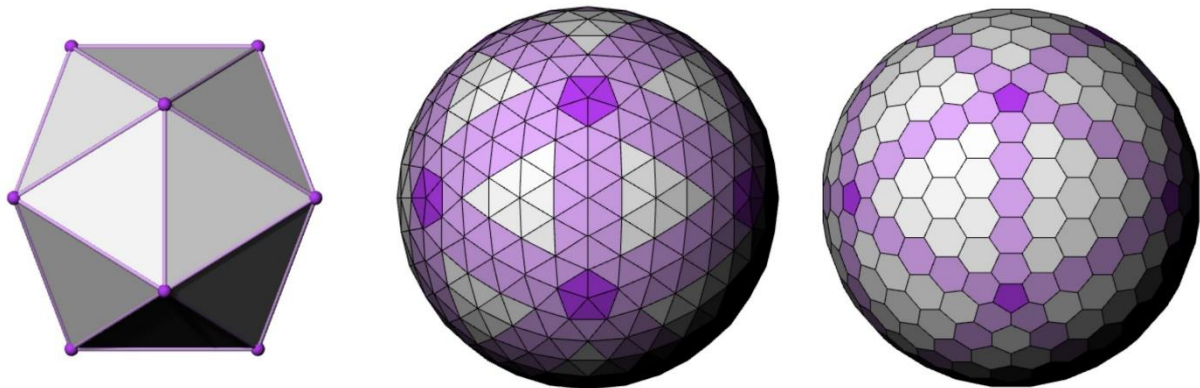
Définition : si on considère un dôme géodésique dual est le dôme constitué des barres qui relient les triangles. Cela donne un dôme en nid-d'abeilles. On l'appelle dual car si on relie les centres des nids-retrouve le dôme triangulé initial : le dual du dual à la géométrie de base.



triangulé, son centres des
d'abeilles, on correspond ainsi

Enfin, en regardant bien, notons qu'il est possible de repérer quelques irrégularités typiques des dômes géodésiques. En correspondance des angles du solide de Platon initial, on voit que seuls 5 triangles se rejoignent contre 6 sur le reste de la structure.

Sur le dual c'est encore plus visible, car il y a à ces endroits des pentagones à la place des hexagones habituels.



Images : Construire l'Architecture, Marc LEYRAL

