

CM : STRUCTURE 2

CYCLE LICENCE S3/S4

Marc LEYRAL – Sylvain EBODE

Gateway Arch, Saint Louis, USA



S2-C7

LES ARCS, LES VOÛTES EN BERCEAU ET LES DÔMES

Présentation de ces archétypes structuraux

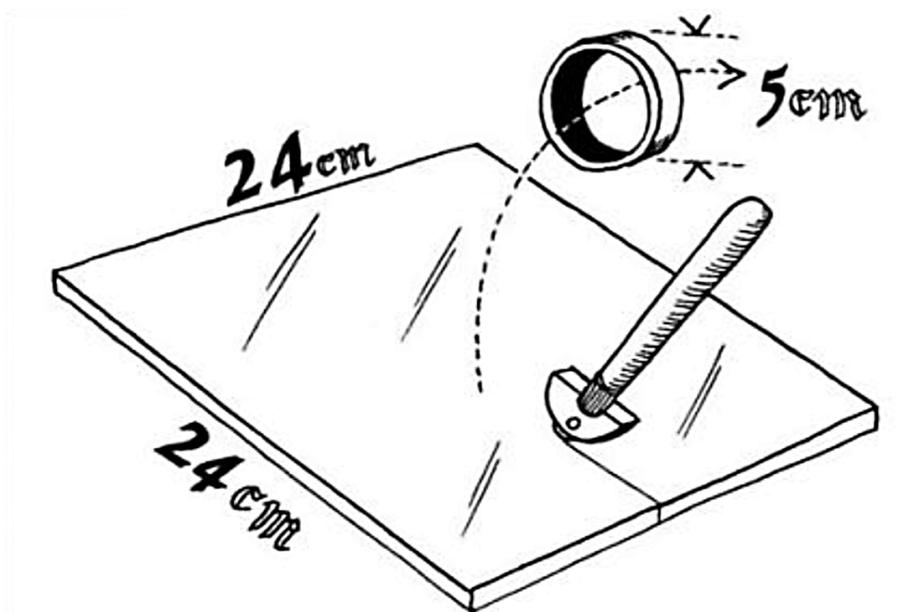
ECHAUFFEMENT

Chaque cours commence par un petit exercice d'échauffement, afin de rendre ludique l'usage des mathématiques et de la logique

Les deux verriers

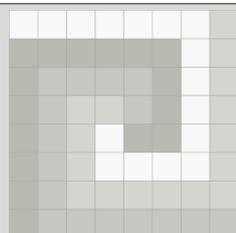
Deux maîtres verriers sont en compétition pour réaliser les vitraux de la cathédrale de Chartres. Pour les départager, l'archevêque leur lance un défi :

« Voici un carré de verre de 24 cm de côté et un anneau de 5 cm de diamètre. Celui qui parviendra à découper le carré en quatre morceaux égaux de façon qu'ils passent dans l'anneau sans se briser remportera le marché. »



Réponse :

Avant de découper, il faut savoir quelle trame utiliser. Nous cherchons la plus grosse maille possible dont un angle (la diagonale) passe dans l'anneau.
Un carré de 3 x 3 a une diagonale de $\sqrt{3^2+3^2} = 4,3$ cm (OK)
Un carré de 4 x 4 a une diagonale de $\sqrt{4^2+4^2} = 5,7$ cm (PAS OK)
On va tracer un quadrillage de $24/3 = 8 \times 8$ sur le vitrail et le découper en spirale pour en faire seulement quatre morceaux.

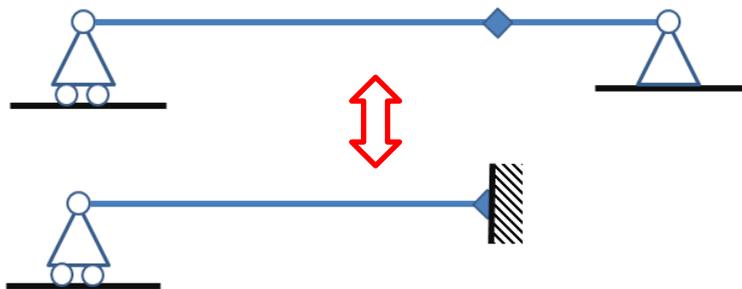


Rappels de cours (C4-C5-C6 : Résumé sur le dimensionnement)

Les diagrammes MNT : principes

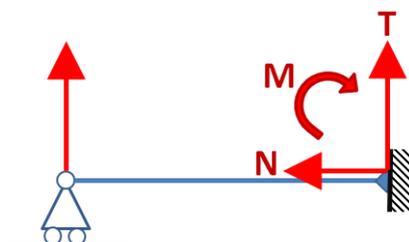
Le principe de la coupe imaginaire permet de transformer par la pensée des efforts internes en forces externes afin de pouvoir les évaluer par les outils classiques du PFS.

Schéma statique : On peut représenter une poutre comme deux morceaux d'une poutre coupée par la pensée et **encastrés** entre eux. Il est alors possible de réaliser le schéma statique du morceau gauche de la poutre isolé de celui de droite. Le morceau de droite est alors considéré comme un **support** dans lequel la poutre est encastrée.



Les forces de réactions à l'encastrement sont une représentation, mentale et fictive, des efforts internes à la poutre. Il s'agit d'un artefact utile à leur calcul.

Effort Tranchant	Effort Normal	Moment fléchissant
<ul style="list-style-type: none">La réaction en force verticale retient la partie de gauche de la poutre vers le haut.Elle correspond à un effort interne appelé effort tranchant car il est perpendiculaire à la poutre, il la « tranche ».Il est noté T (parfois V).	<ul style="list-style-type: none">La réaction en force horizontale retient la partie de gauche de la poutre si elle était poussée latéralement, par le vent par exemple.Elle correspond à un effort interne appelé effort normal car il s'exerce sur la normale de la section de la poutre.Il est noté N.	<ul style="list-style-type: none">La réaction en moment d'encastrement permet de stabiliser la flexion de la partie gauche de la poutre, c'est le moment interne à la poutre que nous avons vu en C3 – <i>Equilibre à la flexion</i>.Elle correspond à un moment interne appelé moment fléchissant car il provient de la flexion de la poutre.Il est noté M.



Convention de signe

Il est nécessaire choisir une convention de signe et de s'y tenir.

Convention de signe usuelle :



Cette convention sous-entend donc que

Effort normal : Positif → Traction Négatif → Compression	Effort tranchant positif → Lutte contre la chute	$M > 0 \rightarrow$ fibres tendues en bas $M < 0 \rightarrow$ fibres tendues en haut
<p>Ex. câble de grue en traction</p>	<p>Ex. console</p>	<p>Ex. console</p> <p>Ex. poutre isostatique</p>

Méthodologie des diagrammes MNT

Afin de pouvoir dimensionner les éléments d'une structure, il faut connaître les endroits les plus sollicités et savoir combien ils sont sollicités.

Diagrammes MNT : diagrammes représentant en tout point de l'élément structurel considéré la valeur du moment fléchissant M, de l'effort normal N et de l'effort tranchant T.

Ces diagrammes dépendent des liaisons et des charges.

Démarche (à connaître par cœur) :

ETAPE 1 : TRACER LE SCHEMA STATIQUE DU PROBLEME

ETAPE 2 : PLACER LES REACTIONS AUX APPUIS ET LES RESOUDRE

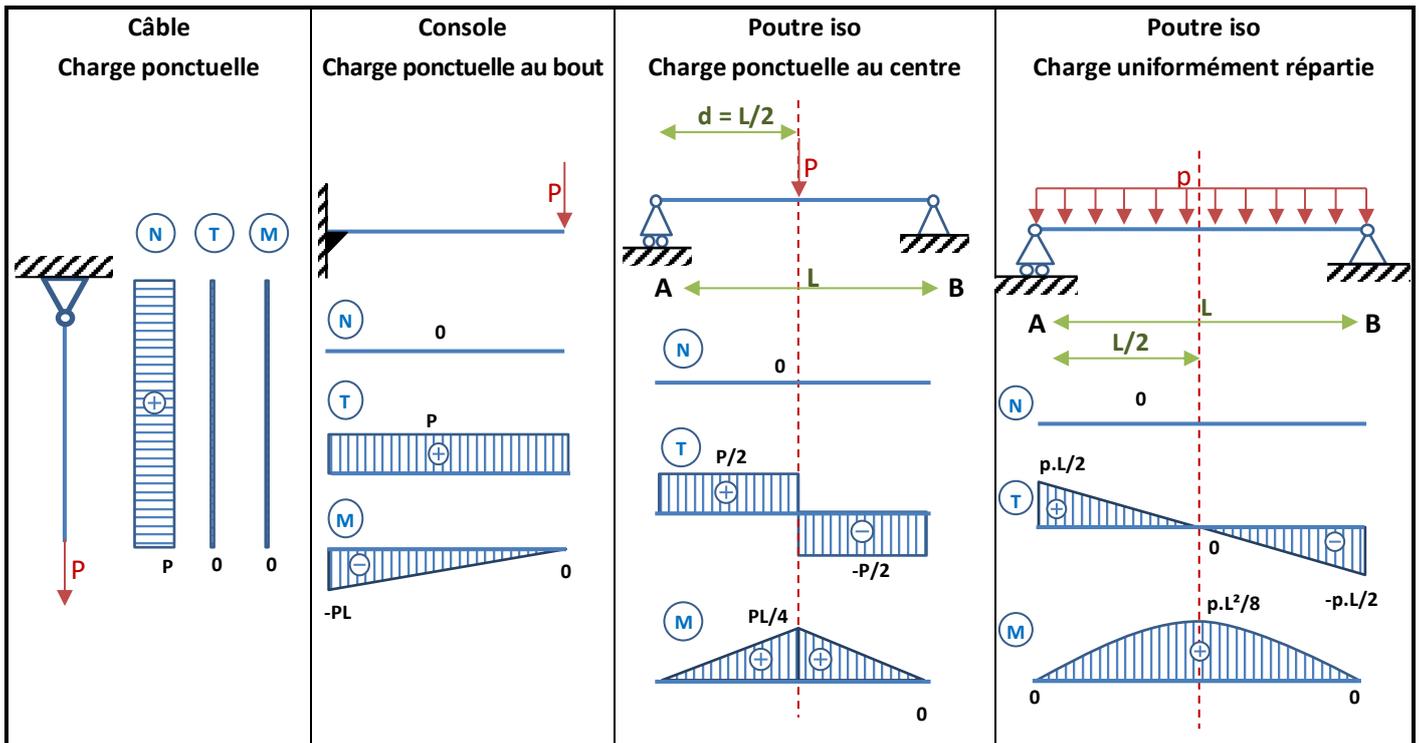
ETAPE 3 : REALISER UNE COUPE POUR CHAQUE CONFIGURATION DIFFERENTE

ETAPE 4 : CHOISIR ET REPRESENTER LA CONVENTION DE SIGNE

ETAPE 5 : TROUVER LES VALEURS DE M, N et T EN TOUT POINT

ETAPE 6 : TRACER LES DIAGRAMMES MNT

Exemples types de diagrammes MNT :



Dimensionnement

- A l'ELU :

La **contrainte normale** dans la section de la poutre due à la **flexion** vaut donc :

$$\sigma_{N,M} = \frac{M \cdot y}{I_z}$$

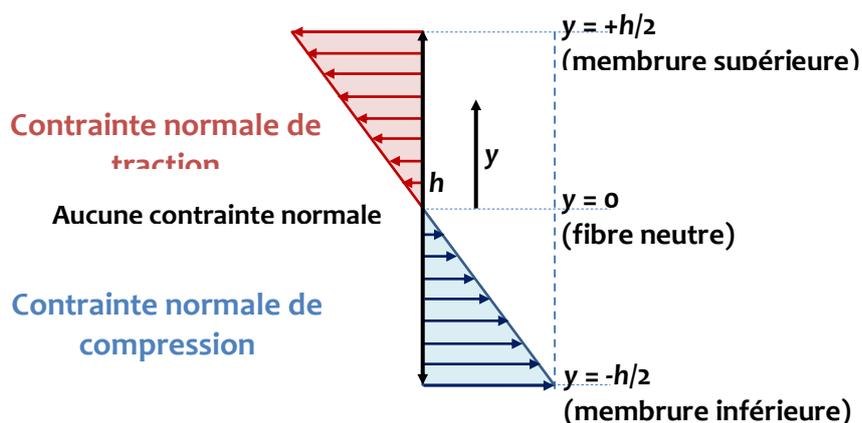
Si le matériau est **homogène** (ex. : acier), elle est **maximale sur les membrures extérieures** ($y = \pm h/2$).

Ainsi, la contrainte normale de flexion maximale pour une **poutre rectangulaire** ($I = bh^3/12$) vaut :

$$\sigma_{N,M} = \frac{6 * M}{b * h^2}$$

Elle doit rester inférieure à la limite d'élasticité du matériau.

Unité : le mégapascal $1 \text{ MPa} = 1 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 1 \frac{\text{MN}}{\text{m}^2}$



	Contraintes normales dues à une traction simple	Contraintes normales dues à un moment fléchissant												
Schéma des contraintes														
Contraintes	$\sigma_N [MPa] = \frac{N [N]}{S [mm^2]}$	<p>Contrainte normale dans la section :</p> $\sigma_{N,flexion} [MPa] = \frac{M [N \cdot mm] * y [mm]}{I_z [mm^4]}$ <p>Contrainte maximale sur les membrures extérieures $y = \pm h/2$:</p> $\sigma_{N,max,flexion} = \frac{M * h/2}{I_z}$ $\sigma_{N,max,flexion} = \frac{6 * M}{b * h^2} \text{ (poutre rectangulaire)}$												
Contraintes admissibles	$\sigma_N \leq \sigma_y$ (limite d'élasticité du matériau) <table border="1" style="margin-top: 10px;"> <thead> <tr> <th>Matériaux</th> <th>Limite d'élasticité [MPa]</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Acier de construction</td> <td>235 à 355</td> </tr> <tr> <td>Acier d'armatures</td> <td>500</td> </tr> <tr> <td>Béton</td> <td>15 à 80 (souvent 30)</td> </tr> <tr> <td>Bois résineux</td> <td>18 à 30</td> </tr> <tr> <td>Bois lamellé-collé</td> <td>24 à 32</td> </tr> </tbody> </table>	Matériaux	Limite d'élasticité [MPa]	Acier de construction	235 à 355	Acier d'armatures	500	Béton	15 à 80 (souvent 30)	Bois résineux	18 à 30	Bois lamellé-collé	24 à 32	
Matériaux	Limite d'élasticité [MPa]													
Acier de construction	235 à 355													
Acier d'armatures	500													
Béton	15 à 80 (souvent 30)													
Bois résineux	18 à 30													
Bois lamellé-collé	24 à 32													

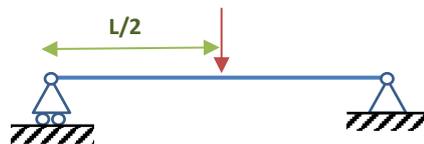
• **A L'ELS :**

Il s'agit de s'assurer que la **déformation** de l'élément sous **combinaisons de charges ELS** reste **inférieure à une valeur normative**, qui quantifie la **limite de déformation** à partir de laquelle on estime que l'élément **n'assure plus un bon état de service**, et qui est exprimée en **tantième de la portée** (par exemple 1/200^e pour une poutre en acier supportant un plancher normal).



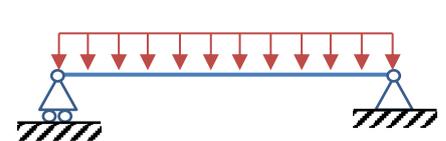
Console avec charge ponctuelle P à l'extrémité :

$$f = \frac{P \cdot L^3}{3 \cdot EI}$$



Poutre isostatique, avec une charge ponctuelle P en son milieu :

$$f = \frac{P \cdot L^3}{48 \cdot EI}$$



Poutre isostatique avec une charge p uniformément répartie :

$$f = \frac{5 \cdot p \cdot L^4}{384 \cdot EI}$$

Sommaire du cours

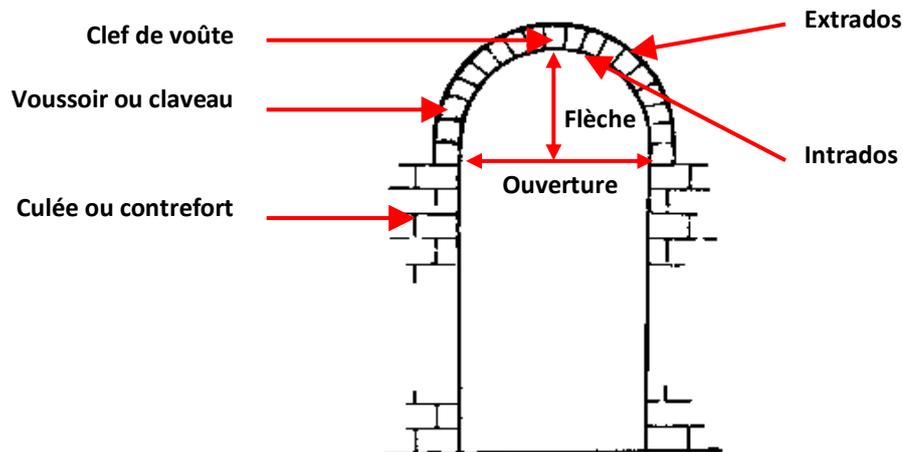
SOMMAIRE DU COURS	7
7 LES ARCS, LES VOUTES EN BERCEAUX ET LES DOMES	8
7.1 Les arcs	8
7.1.1 Poussées au vide	8
7.1.1.1 Poussées au vide sur un arc simple	8
7.1.1.2 Contreforts et culées	10
7.1.1.3 Tirants	14
7.1.1.4 Fonctionnement en arc et analogie avec les poutres	15
7.1.2 Effets thermiques	16
7.1.3 Forme idéale d'un arc	18
7.1.3.1 Funiculaire des forces	18
7.2 Les voûtes en berceau	24
7.2.1 Présentation	24
7.2.2 Le voilement des coques	25
7.3 Les dômes	29
7.3.1 Présentation	29
7.3.2 La mise en charge	32

7 Les arcs, les voûtes en berceaux et les dômes

7.1 Les arcs

Définition : un arc est un élément plan et courbe (ou en morceaux de courbes) destiné à franchir un espace et reposant sur deux points d'appui.

Vocabulaire (utile au cours) :

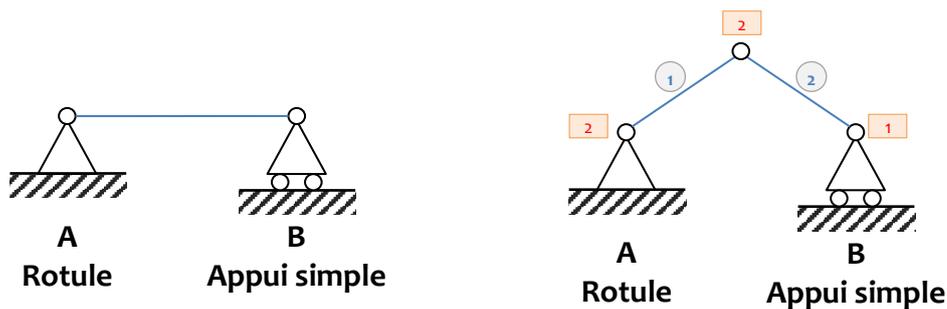


7.1.1 Poussées au vide

7.1.1.1 Poussées au vide sur un arc simple

Exemple d'un arc simple : Partons d'une **poutre isostatique** et rajoutons un voussoir pour former un arc simplifié. Calculons le degré de staticité :

$$h = i - n = 5 - 2 \times 3 = -1 : \text{hypostatique, il y a un degré de liberté}$$

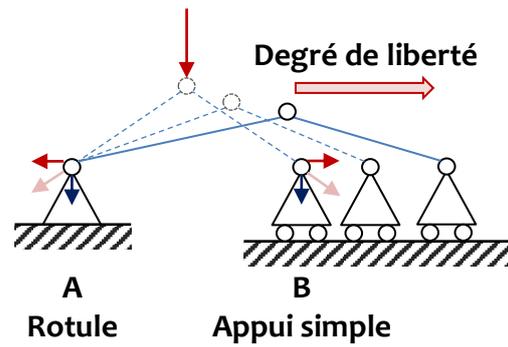
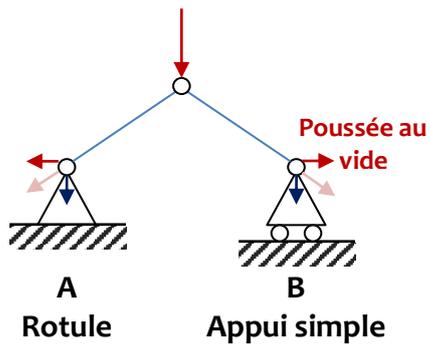
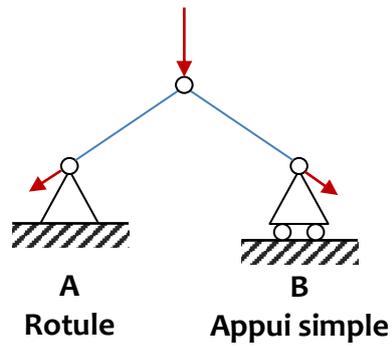


En effet, si une charge est appliquée à l'arc, elle mettra ses deux jambes en **compression**, via un **effort normal** (= incliné dans le sens de chaque jambe).

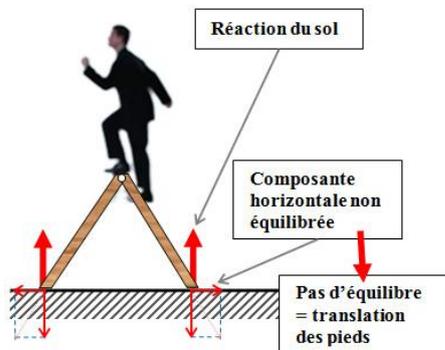
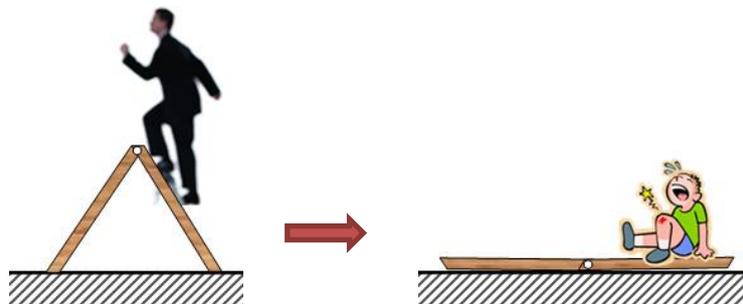
Cette force se décompose en la somme d'une **composante verticale** et d'une **horizontale**.

La composante verticale est reprise par le sol.

La force horizontale est appelée **poussée au vide**, si l'arc est sur appui simple, il va glisser : il faut donc **équilibrer** cette force !



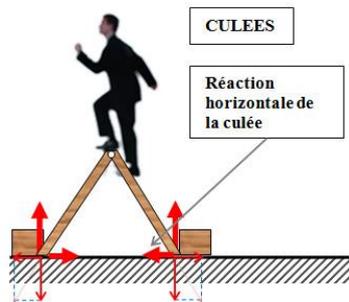
Exemple de l'escabelle (source : *Comment tout ça tient ?*, Michel Provost & Philippe de Kemmeter) :



La **composante horizontale** à la base des arcs est appelée **poussée au vide**.
Il est impératif de l'équilibrer.

7.1.1.2 Contreforts et culées

La première méthode consiste à « mettre des cales » pour rester sur l'exemple de l'escalabeau (quand quelqu'un le tient quand on monte, par exemple).



Cette solution est la plus simple. On appelle ces cales en architecture des **culées** ou **contreforts**.

Au début de l'histoire de la construction des églises, on utilisait les standards de l'**art roman**.

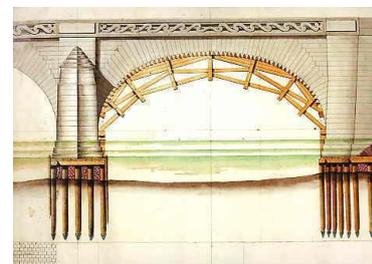
Les arcs étaient alors des arcs en **plein cintre**, c'est-à-dire en forme de demi-cercle. La poussée au vide de ces arcs est assez importante et ils avaient besoin de **contreforts massifs** en pierre.



Chapelle Notre-Dame-du-Revest, Var, France. Eglise du XIIe siècle.

La consommation de matériaux (pierres pour l'édifice et bois pour le coffrage) devient l'une des problématiques les plus importantes pour les constructeurs lors de la construction des **ponts en voûtes**, comme le pont du Gard, par exemple.

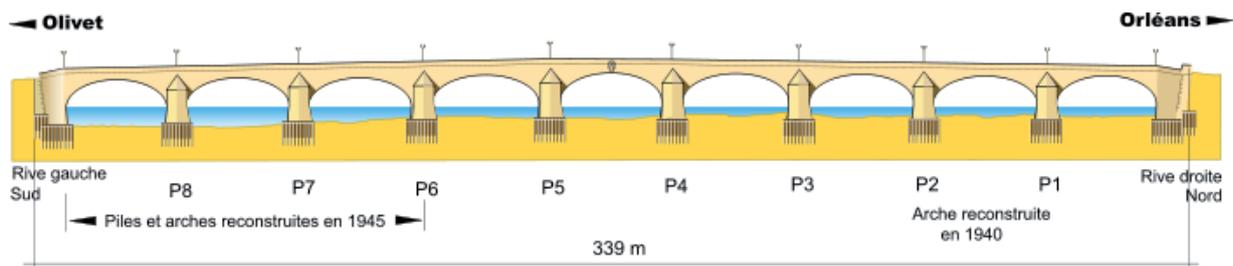
Ces ponts sont constitués de beaucoup d'arcs consécutifs. Si la région est pauvre en bois, ce matériau coûte très cher. Or le bois est utilisé pour le coffrage des arcs, qu'on appelle les **cintres**.



Cintres du pont de Cessart à Saumur.

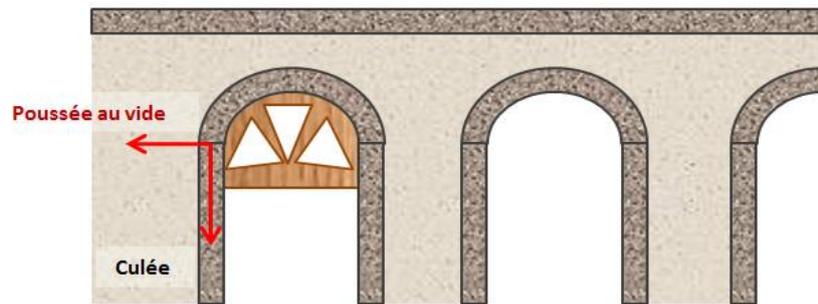
Pour économiser le bois, il faut alors réaliser les voûtes une à une (cela permet de récupérer le cintre pour la voûte suivante). Chaque voûte doit alors être stable par elle-même, comme si elle était toute seule. Il faut donc que la masse des pierres entre deux voûtes puisse reprendre la poussée au vide de chacune des voûtes.

La règle au XVIIIe siècle stipulait que la pile devait avoir pour épaisseur le cinquième de l'ouverture des arcs.



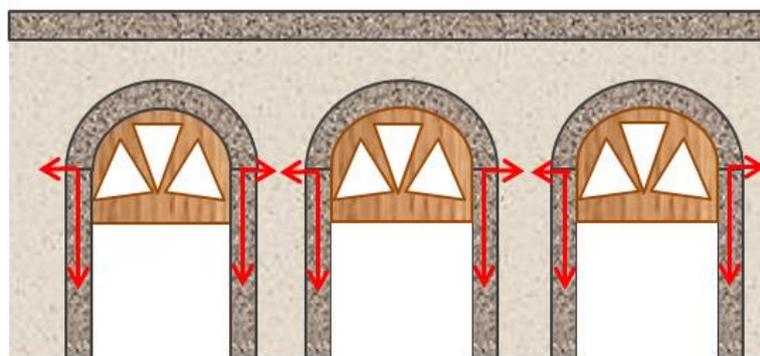
Pont Royal, actuellement pont George V, à Orléans, construit de 1751 à 1753 suivant le projet de Jean Hupeau, achevé par Jean-Rodolphe Perronet.

En d'autres termes, pour que la voûte en cours de construction tienne toute seule, il fallait mettre beaucoup de pierres entre deux voûtes, ce qui n'est pas très économique.



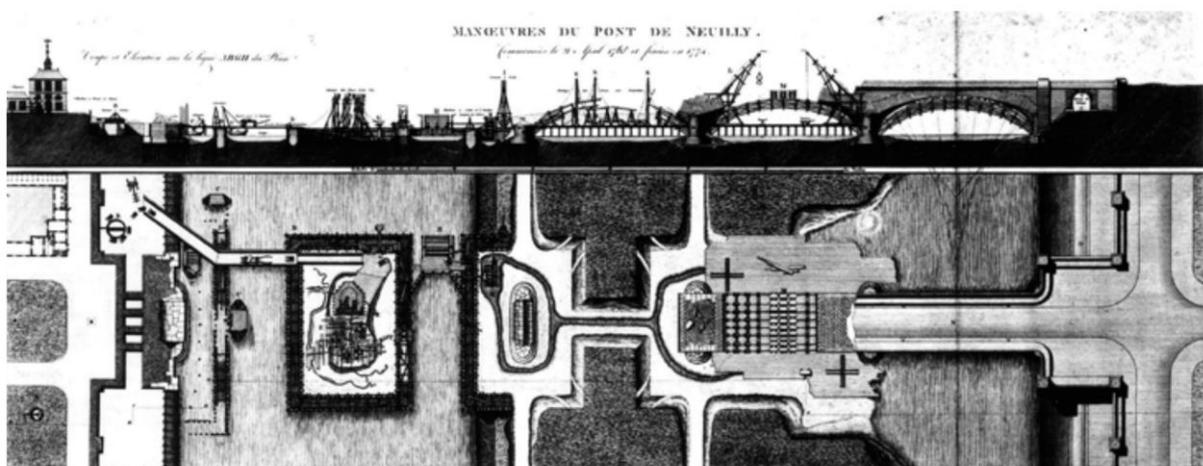
Lorsque le bois devint une ressource plus abondante, Jean-Rodolphe Perronet, fondateur de l'École des Ponts et Chaussées, eut l'idée, pour le Pont de Neuilly (inauguré en 1772) de construire simultanément toutes les voûtes.

Ainsi la poussée au vide d'une voûte était équilibrée par la poussée dans l'autre sens de sa voisine. Les poussées aux vides s'équilibrent entre elles, ils n'y a plus besoin de mettre une grande masse de pierre entre les voûtes.



Et les ponts devinrent beaucoup plus fins : l'épaisseur des piles du pont de Neuilly ne font qu'un neuvième de l'ouverture de l'arc (1/8,7 très précisément).

Cela permit en outre de réaliser les ouvrages de franchissement avec des **arcs surbaissés**, alors que c'était jusque-là assez problématique en dépit de l'avantage que cette forme donnait au pont : ils permettaient d'enjamber des rivières dans des paysages assez plats sans créer de fortes pentes.



« Manœuvres du pont de Neuilly » : planche récapitulant la progression du chantier (BnF). Photo : Jean-Bernard Vialles

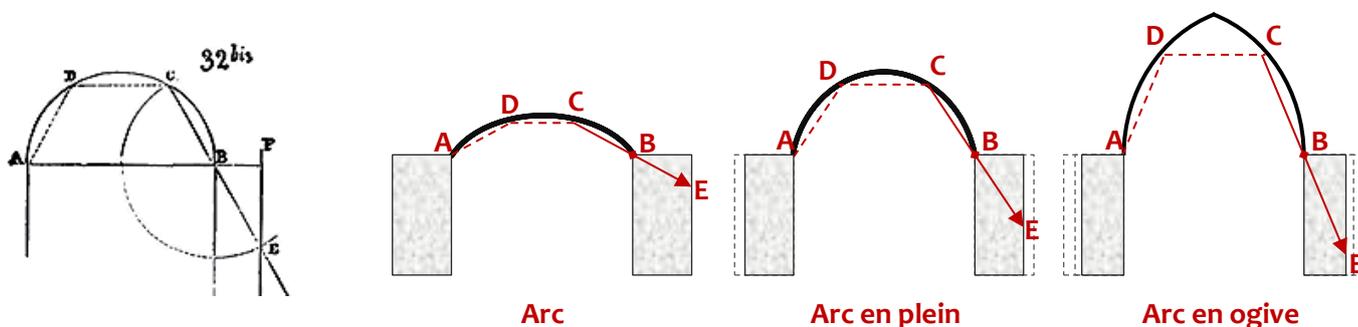
Dans l'architecture religieuse, peut remarquer que les contreforts des édifices gothiques sont plus fins que ceux des églises romanes.

Cela vient de la forme de l'arc. Les églises gothiques sont composées d'arcs en ogive, surélevés, cette forme a pour effet de rendre la charge oblique un peu plus verticale, et donc de réduire la composante horizontale.

Méthode empirique de dimensionnement des culées en fonction de la poussée au vide selon Viollet-le-Duc (Dictionnaire Raisoné de l'Architecture française, Tome 4 « Construction », page 64) :

L'arc est divisé en trois secteurs égaux (AD, CD et CB). Les segments aux extrémités (AD et CB) sont prolongés selon la même direction et sur la même longueur (BE pour la culée de droite).

Le segment obtenu donne l'épaisseur de la culée nécessaire. Ci-dessous, on donne l'application de cette méthode à trois types d'arc : l'arc surbaissé, l'arc roman et l'arc gothique (en ogive).



On peut alors faire des contreforts plus fins, voire les évider en créant des **arcs-boutants** qui reprennent la poussée au vide.

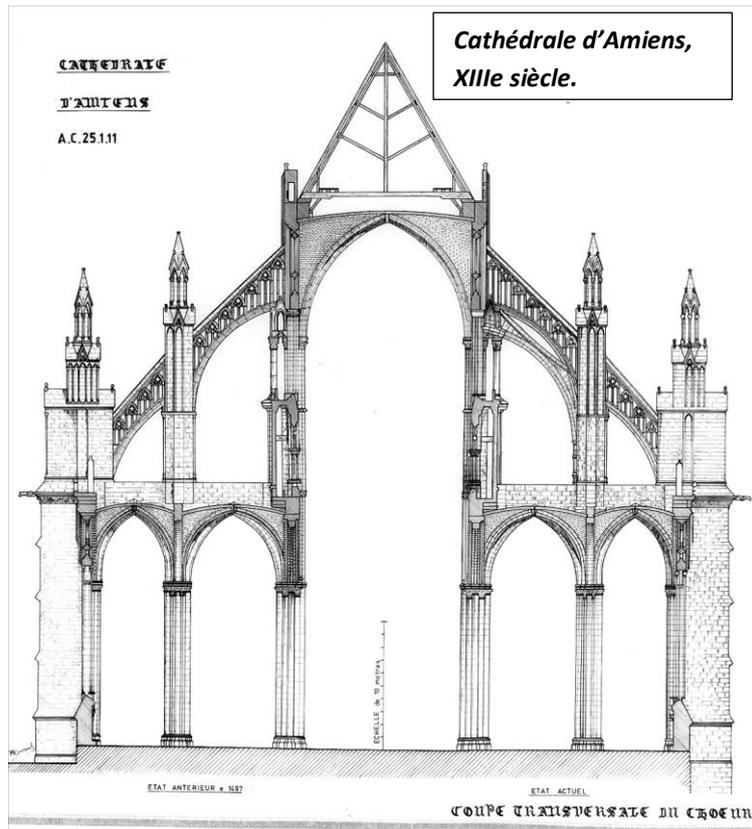
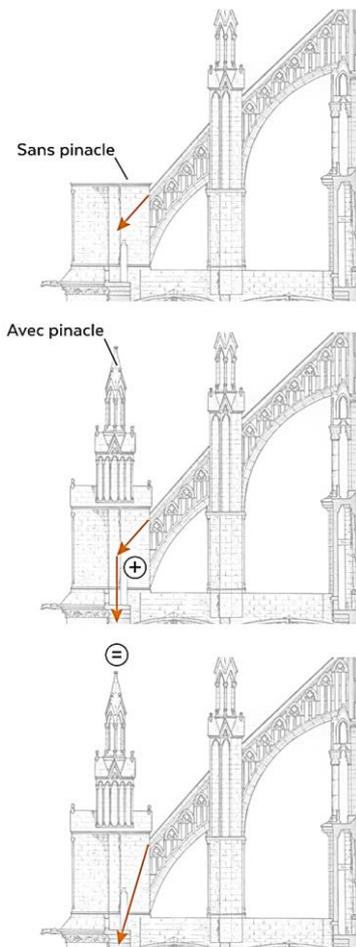
En rajoutant une forte masse, appelée pinacle, à la base de l'arc, la force apportée par le poids pouvait également redresser la composante verticale.

Note : Cette explication répandue est tellement simplifiée qu'elle en est presque inexacte : en réalité, le pinacle ne change pas la valeur de la composante horizontale de la force. Mais, par son poids, il augmente la force horizontale de frottement et le moment résistant du contrefort, comme cela a été démontré sur l'exemple du barrage-poids. Entre la fin XIXème siècle et le début du XXème siècle, un débat animé a lieu sur l'utilité du pinacle. On en retient que celui-ci sert, par son poids, principalement à :

- Augmenter la stabilité globale du contrefort ;
- Augmenter la stabilité locale en tête de contrefort.

Le faible poids du pinacle par rapport à l'ensemble du contrefort indique que le premier point serait en réalité presque négligeable. Concernant le second point en revanche, comme en tête de contrefort la masse est très faible, la compression dans le contrefort l'est également et, en conséquence, il en est de même pour la force de frottement entre deux pierres au niveau du joint. Or c'est justement ce frottement qui assure l'équilibre de la maçonnerie vis-à-vis de la poussée au vide de l'arc. L'équilibre local est alors difficile à assurer en tête du contrefort et l'ajout du pinacle se justifie.

Quand à l'équilibre global d'un contrefort, il se vérifie par le calcul de la même façon que pour le barrage-poids (cf. application du cours S1-C2 - Les équilibres externes) : par le calcul de la masse nécessaire au non-renversement et au non-basculement.



Coupe du cœur de la cathédrale gothique d'Amiens présente : à gauche le projet tel qu'il fut bâti vers 1260, à droite l'intervention de renforcement de 1497.

Parfois, les culées sont naturelles : il s'agit des montagnes ou des massifs d'appuis des ponts par exemple.

Le pont de la Salgina de Robert Maillard en est un bon exemple : les appuis du pont sont des rotules, directement (ou presque) fixées dans la montagne. Les pans de montagne jouent le rôle de culées.

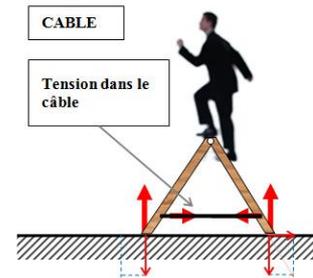


7.1.1.3 Tirants

L'escabeau pris en exemple au début du cours pouvait interloquer le lecteur car il lui manque une pièce classique qui existe sur la plupart d'entre eux : une barre métallique à la base pour empêcher que les pieds ne s'éloignent.

Une deuxième solution possible pour reprendre les poussées au vide s'illustre très bien par cette barre : on peut relier les pieds de l'arc par un **tirant**.

En se mettant en **tension**, il est alors capable de reprendre les poussées au vide.



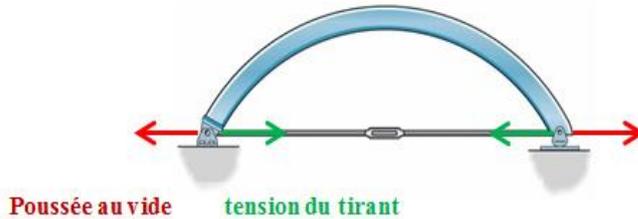
Il est d'ailleurs possible d'en voir dans les églises :

C'est également une solution très ingénieuse pour les ponts.

L'idée est d'utiliser le tablier pour jouer le rôle de tirant, ainsi on fait d'une pierre deux coups : l'arc supporte le poids du tablier, élément de franchissement, et en retour le tablier équilibre les poussées de l'arc. Ces œuvres s'appellent **ponts Bow String**.

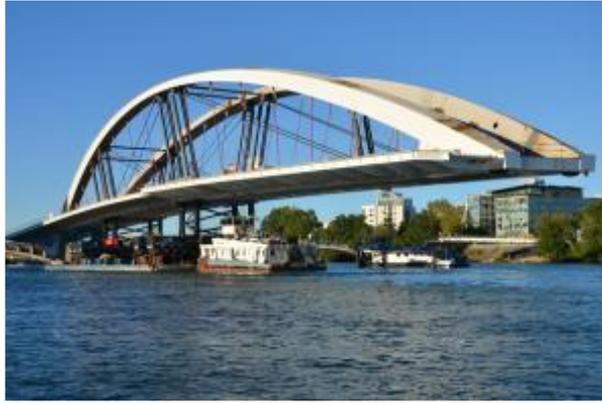


Eglise Santa Maria dell'Arco



Pont de Copenaxfort

Et contrairement aux ponts à culées qui nécessitent la mise en place sur site des contreforts avant la fabrication, les ponts Bow String sont **autostables**. Ils peuvent être fabriqués en atelier et transportés tels quels sur site, sur un bateau par exemple.



Transport fluvial du pont Raymond-Barre (Lyon)

7.1.1.4 Fonctionnement en arc et analogie avec les poutres

Ce dernier point, l'équilibre des poussées au vide par les tirants, permet de comprendre le **fonctionnement de l'arc**, qui est en réalité **très proche de celui d'une poutre**.

Rappel : une poutre isostatique sur deux appuis fléchit lorsqu'elle est soumise à une charge.

La fibre haute se raccourcit et se met en compression. Celle du bas s'allonge et se trouve alors en tension. La compression et la tension sont décalées de la hauteur de la poutre, cela crée un moment stabilisateur qui résiste à la flexion.

Pour une poutre en béton armé, le béton dans la partie supérieure est comprimé et l'acier dans la partie inférieure est tendu.

Lorsqu'on a regardé l'exemple de l'homme sur l'escabeau, sa charge a mis les deux montants en compression. **Un arc fonctionne donc en compression** (la plupart du temps). Mais le tirant à la base du pont Bow-String, lui, est en **traction**.

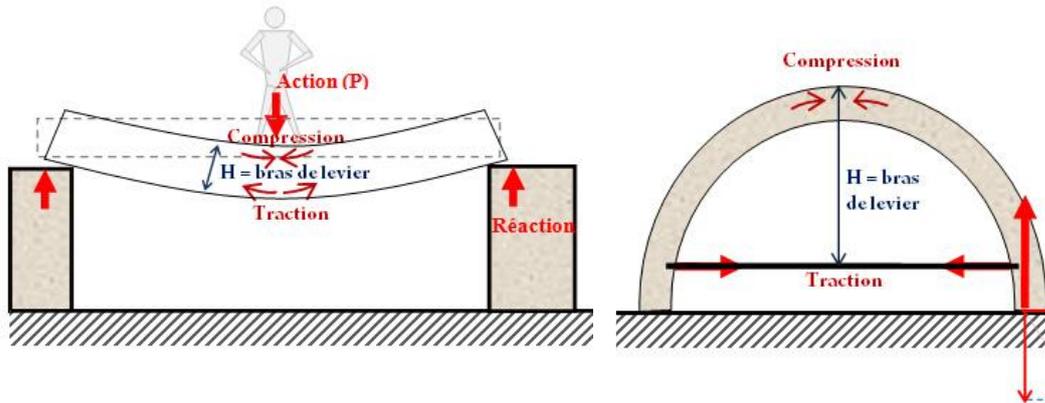
Un ouvrage en arc fonctionne :

- **Par la compression dans l'arc.**
- **Et la traction dans le tirant.**

Comme l'arc et le tirant sont décalés de la hauteur de l'arc, il se crée un moment stabilisant qui lutte contre la flexion, tout comme dans l'exemple de la poutre.

Mais comme la hauteur de l'arc est bien plus importante que la hauteur possible d'une poutre, le moment stabilisant est beaucoup plus important : ainsi, pour franchir une grande portée, un arc sera beaucoup plus efficace qu'une poutre.

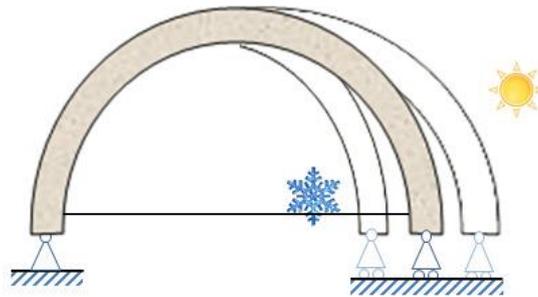
Comme on l'a déjà évoqué, pour augmenter le moment résistant, et donc la rigidité face à la flexion, il faut éloigner la matière en compression de la matière en traction, exactement comme le fait l'arc.



7.1.2 Effets thermiques

Si l'arc fonctionne comme une poutre, il faut, tout comme elle, qu'il puisse se dilater sous la chaleur et se contracter lorsqu'il fait froid.

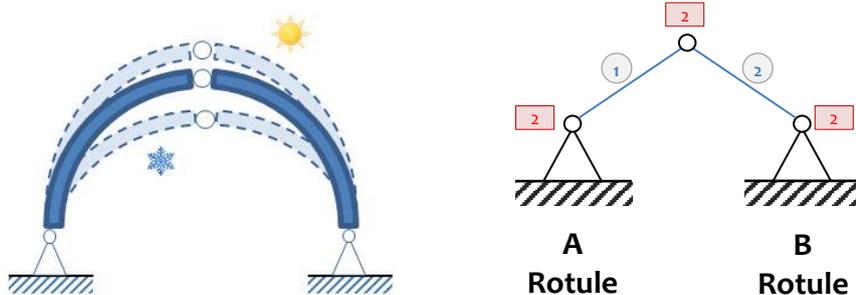
Il est possible, dans le cas d'un pont autostable, comme les ponts Bow-string, de le mettre entre une rotule et un appui glissant.



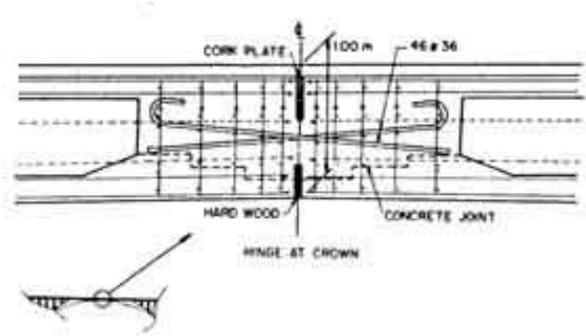
Mais si l'arc n'est pas autostable, que ses poussées au vide sont reprises par des culées externes par exemple, il faut être plus ingénieux (car un appui glissant laisserait la poussée au vide s'exprimer, il aurait alors un glissement et l'arc ne serait pas stable) : Robert Maillart, entre autres, a pensé à réaliser des ponts à trois articulations pour répondre à ce problème.

En plus des deux rotules aux appuis, il y a une troisième rotule au sommet de l'arc. Cette rotule permet le mouvement et donc au pont de se dilater ou de se contracter.

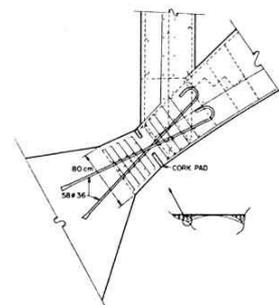
Le système est bien **isostatique** : $h = i - n = 3 \times 2 - 2 \times 3 = 0$



Pont et dispositif constructif de la troisième rotule par Robert Maillart :



Pour réaliser les appuis, qui devaient laisser libre la rotation (afin d'annuler le moment fléchissant) mais en même être assez résistants pour reprendre la totalité des charges (efforts tranchants, s'il y en a, et efforts normaux), Maillart emprunta un système inventé en France par Mesnager et Freyssinet :

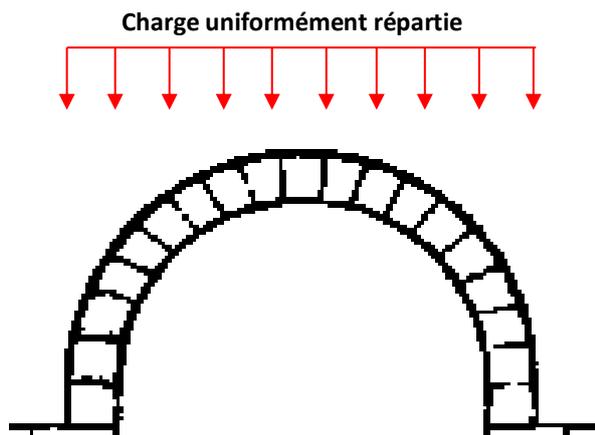


7.1.3 Forme idéale d'un arc

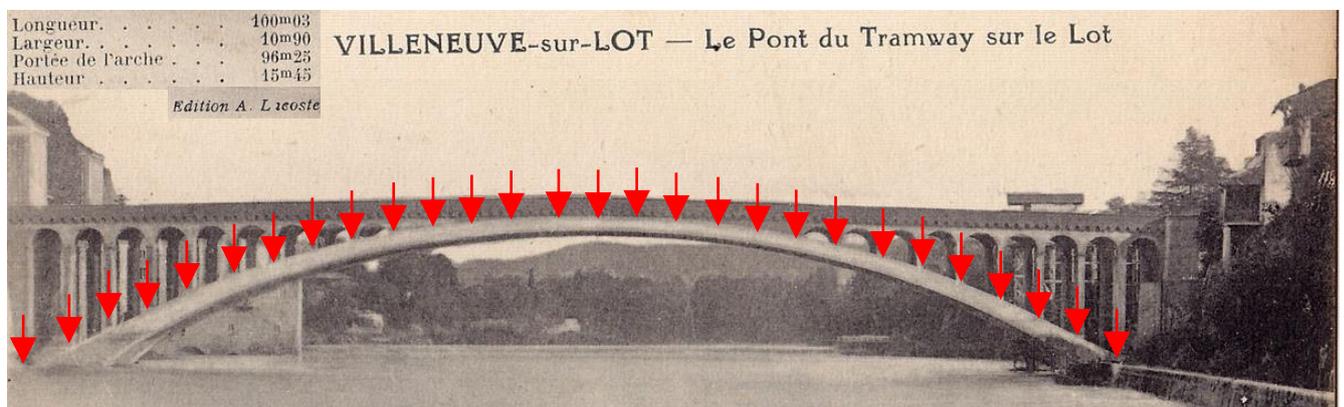
7.1.3.1 Funiculaire des forces

Nous nous intéressons ici à la **géométrie globale** de l'arc. Evidemment, il n'y a pas de forme idéale et intrinsèque à un arc. Car la forme de l'arc dépend du chargement auquel il est soumis.

En revanche, **pour un chargement donné**, il existe une **forme idéale** à l'arc que l'on appelle **funiculaire des forces** qui assure que l'arc entier est en compression. Pour simplifier, nous nous concentrerons sur le funiculaire des forces d'un arc subissant un chargement uniformément réparti :



C'est une bonne approche du problème, que ce soit pour les arcs supportant des murs en maçonnerie que pour des arcs soulevant un tablier de pont chargé par un trafic routier assez continu.

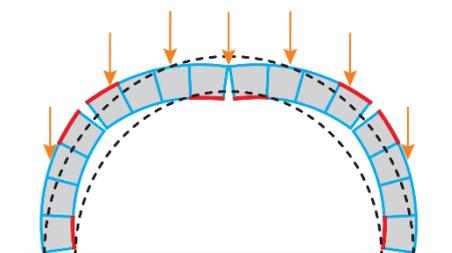


Pour qu'un arc fonctionne bien, il doit être en compression.

C'est d'autant plus vrai s'il est réalisé en blocs de pierre ou en maçonneries qui n'ont aucune résistance à la traction.

Si les blocs d'un arc, appelés voussoirs, se trouvaient en traction, alors ils se désolidariseraient et l'arc s'écroulerait.

Comment les constructeurs s'assuraient-ils que les arcs restent en compression ?



En ce qui concerne les lignes de pressions, voici ce qui est écrit dans le *Dictionnaire Raisoné de l'Architecture française* (Viollet-le-Duc) :

Il est probable que les architectes gothiques primitifs s'étaient fait des règles très simples pour les cas ordinaires; mais il est certain qu'ils s'en rapportaient à leur seul jugement toutes les fois qu'ils avaient quelque difficulté nouvelle à résoudre.

Il s'agit donc d'une méthode très empirique, par expériences successives.

Funiculaire des forces :

L'empirisme reste la seule méthode existante jusqu'à la découverte du **funiculaire des forces**.

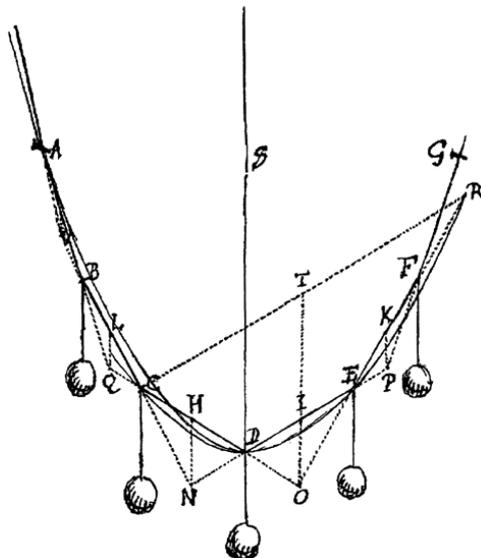
Il s'agit de répondre à cette question posée par Bernard Forest Bédidor en 1725 dans son livre *De la Mécanique des Voûtes* :

PROBLÈME : Trouver quelle est la courbe qu'il conviendrait de donner à une Voûte, pour que tous les voussoirs, étant égaux en pesanteur, soient en équilibre.

Bédidor résout se problème en étudiant une chaînette. Si nous mettons un **poids** sur la **chaînette**, celle-ci **se tend** et prend une forme triangulaire.

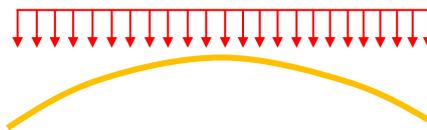
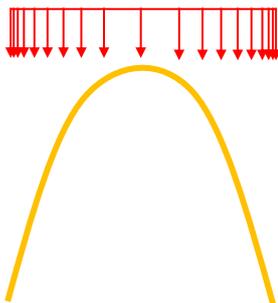
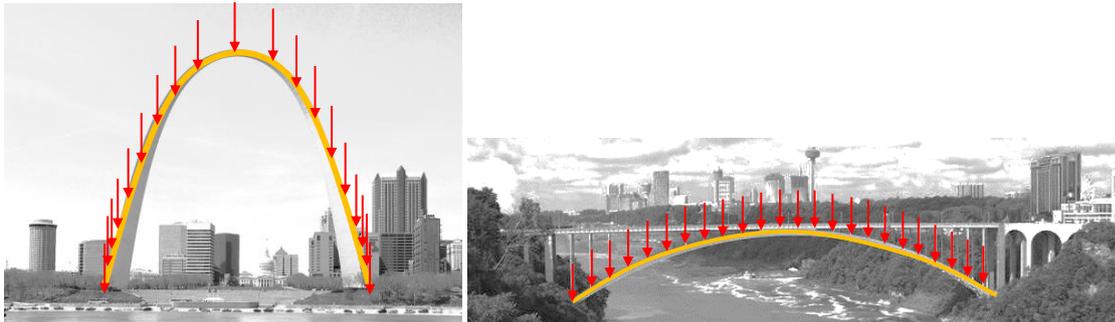


Si nous rajoutons de nombreux poids, la chaînette devient uniformément chargée.



La chaînette se tend et prend une forme particulière : celle d'un **cosinus hyperbolique**.

Dans le cas d'un chargement linéairement réparti entre les pieds de l'arc (comme sur le tablier d'un pont), la forme devient **parabolique**.



▲ Charge linéairement répartie sur l'ouverture de l'arc : **PARABOLE**

Exemple : Pont Rainbow (chutes du Niagara)

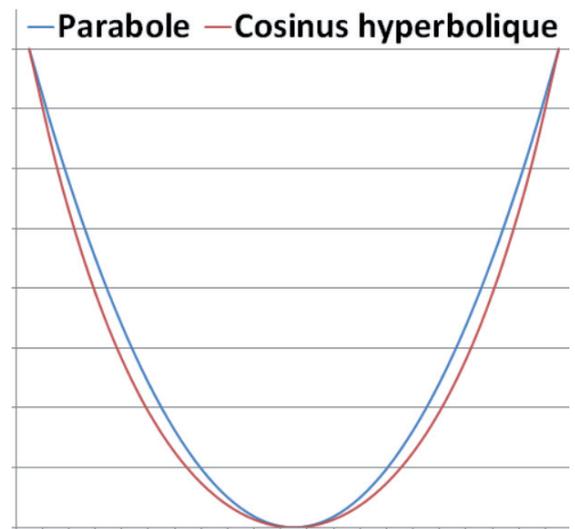
◀ Charge uniformément répartie sur la longueur de l'arc : **COSINUS HYPERBOLIQUE**

Exemple : Gateway Arch à Saint-Louis (États-Unis)

Remarque : Galilée pensait que la chaînette était parabolique. C'est faux, il s'agit bien d'un cosinus hyperbolique, même si visuellement, ces deux formes sont proches. En 1691, Huygens, Leibniz et Bernoulli prouvèrent simultanément (ils répondaient à un défi lancé par Bernoulli) qu'il s'agissait d'un cosinus hyperbolique.

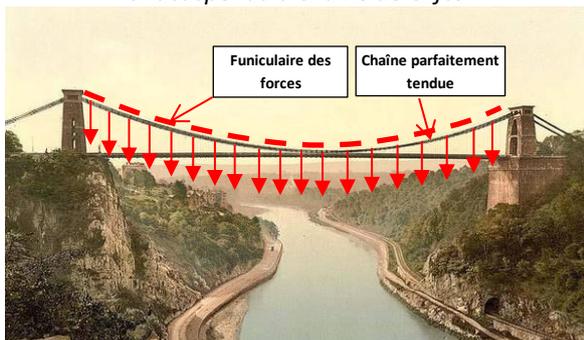
Une chaînette travaillant nécessairement en traction (pas de compression dans un câble sans rigidité), alors si on applique une force opposée à un arc ayant la même forme mais symétrique par rapport à l'horizontale, celui-ci sera nécessairement en compression.

Si la chaînette prend une certaine forme lorsqu'elle est tirée uniformément, alors si on la retourne, la forme symétrique doit être parfaitement comprimée.



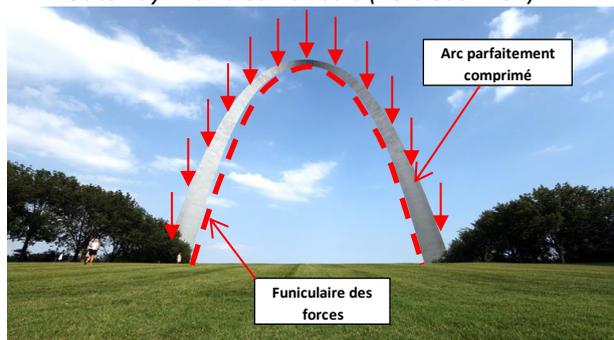
Chaînette parfaitement tendue (parabole)

Pont suspendu à chaîne de Clifton



Arc parfaitement comprimé (cosinus hyperbolique)

Gateway Arch à Saint-Louis (Eero Saarinen)



Robert Hooke découvre ce principe vers 1675 (comme à son habitude, pour protéger sa découverte, il l'énonce sous forme d'anagramme) :

Anagramme : « abcccddeeeeeeefggiiiiiiiillmmmmnnnnnooprssstttttuuuuuuux »

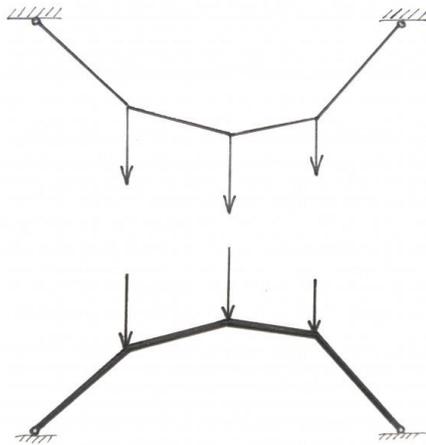
Latin : « *ut pendet continuum flexile, sic stabit continuum rigidum inversum* »

Français : « *de même que pend un câble flexible, de même, en inversant, on trouve les pièces contiguës d'une arche* ».

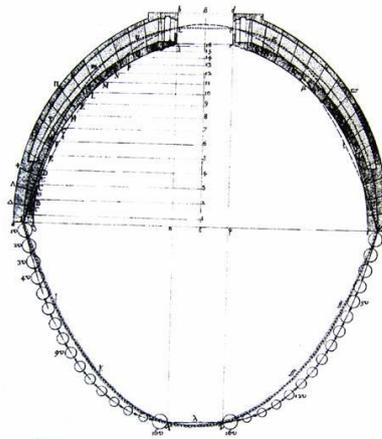
Français (autre traduction) : « *Tel pend un fil flexible, s'élève l'arche rigide, mais de manière inversée* »

En 1742, **Giovanni Poleni**, mathématicien et physicien italien, démontre grâce à une chaînette au pape Benoît XIV que Michel-Ange s'était un peu trop éloigné de la forme funiculaire dans la conception du dôme, expliquant ainsi l'apparition de fissures dans la coupole de Saint-Pierre de Rome.

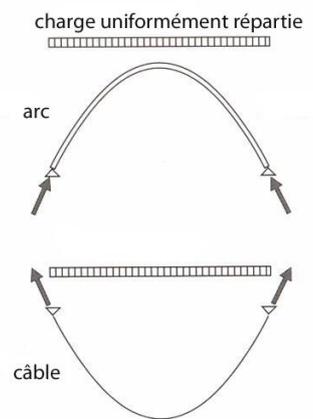
Principe de la chaînette inversée



Croquis de Polemi (St Pierre de Rome)



Application



On pense également que **Filippo Brunelleschi** avait déjà maîtrisé le funiculaire et l'a employé dans la statique de la coupole de la cathédrale Santa Maria del Fiore édifée en 1436 à Florence.

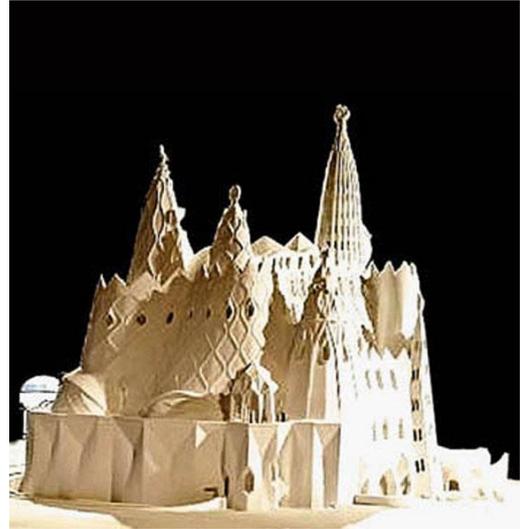
Exemples :

- Gaudí pour la Sagrada Família, réalisait une maquette à l'envers, en la chargeant avec des poids. En la regardant ensuite dans un miroir posé au sol, il obtenait la forme parfaitement comprimée correspondante. Mais Gaudí, malgré tout son génie, n'est absolument pas l'inventeur de la méthode, on considère que Hooke en a fait la référence la plus ancienne connue.
- On pouvait également plâtrer les draps pour les retourner plus facilement et réaliser des coques.

Conception de la structure de la Casa Milà (Gaudí)



Maquette funiculaire de la crypte de la Colonie Güell, projet inachevé de Antoni Gaudí, qui inspirera l'architecte pour la Sagrada Família.



Les arcs caténaux du grenier de la **Casa Milà** et Antoni Gaudí

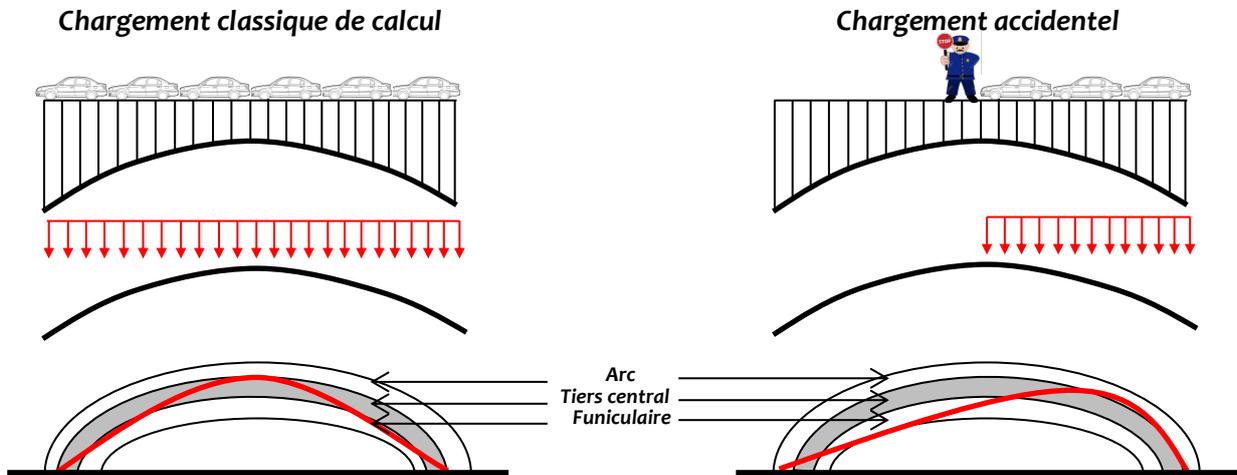
De la théorie à la pratique

Dans la vie d'un ouvrage, celui-ci est soumis à des charges variables.

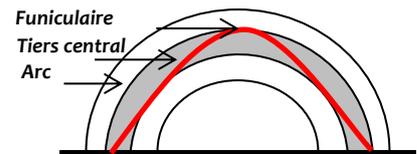
Prenons l'exemple d'un pont : il peut être uniformément chargé avec des voitures réparties sur toute la route, mais il peut arriver un moment dans sa vie où seulement la moitié du pont l'est, par exemple si la route est interrompue par un barrage routier.

Généralement, nous calculons le funiculaire des forces sous une charge linéairement répartie mais nous ne nous interdisons pas de vérifier les autres cas car, comme le dit Méry dans son Mémoire sur l'équilibre des voûtes en berceau :

« Lorsqu'on fait passer sur une voûte un lourd fardeau, la courbe des pressions prend successivement diverses formes, comme le ferait une chaîne de suspension et pendant qu'elle subit ces oscillations il faut toujours qu'elle reste renfermée entre l'intrados et l'extrados de la voûte pour que celle-ci ne tombe pas. »



L'idée est donc que, une fois déterminé ce funiculaire des forces, la matière de l'arc soit disposée de sorte à ce qu'elle l'englobe parfaitement. Une sécurité, dite « **règle du tiers central** » proposée par Navier (1^{ère} moitié du XIX^e siècle) demande que le funiculaire soit entièrement compris dans le tiers central de l'arc (en gris sur l'illustration).



Ceci est assez critiqué de nos jours car trop conservatoire (Jacques Heymann, dans *The stone skeleton*, 1995 suggère que le funiculaire soit compris dans les deux quarts centraux de l'arc).

Cependant, cette règle, introduite en 1825 par Navier dans ses cours à l'École Nationale des Ponts et Chaussées, permet de s'assurer que les sections soient complètement comprimées.

Si le funiculaire s'éloigne du tiers central en certain point, alors les sections ne sont que partiellement comprimées et les joints entre les voussoirs peuvent s'ouvrir.

Méry précisa dans son *Mémoire sur l'équilibre des voûtes en « berceau »* (Ponts et Chaussées, 1840) que :

« l'intrados et l'extrados forment deux limites dont la courbe des pressions ne doit jamais sortir et lorsque cela arrive, l'équilibre est impossible »

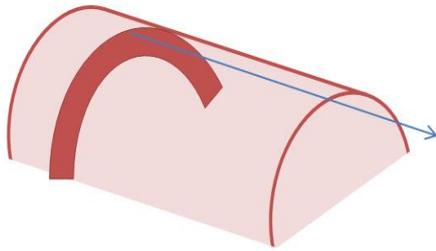
Ce qui veut dire que **si le funiculaire des forces sort de la matière de l'arc, alors celui-ci s'écroulera.**

7.2 Les voûtes en berceau

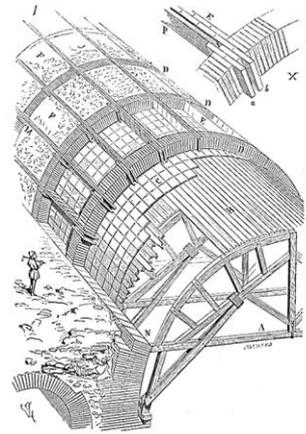
7.2.1 Présentation

Définition : une voûte en berceau est une surface (= en deux dimensions) créée par la **translation horizontale** d'un arc.

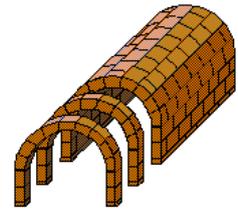
Historique : les premières voûtes en berceau étaient réalisées au moyen d'épais arcs qui assuraient la tenue des charges tout en étant couverts par un remplissage léger en bois et en argile.



Voûte romane à Carcassonne.



D'autres techniques permirent de réaliser des voûtes en berceau en une seule pièce dans lesquelles c'est toute la surface qui travaille : certaines voûtes en briques ou en pierre fonctionnent sur le même principe que les arcs romans avec leurs voussoirs empilés et une clef de voûte assurant l'équilibre de tout l'édifice.



Une voûte en berceau à forme funiculaire au palais de Ctésiphon en Irak

Plus récemment, les **coques** permirent de réaliser les voûtes en une pièce homogène, telles les Halles du Boulingrin à Reims. Cet espace magnifique, œuvre de l'architecte Emile Maigrot, est couvert par une voûte en coque de béton armé épaisse de 6 cm seulement qui n'aurait jamais vu le jour sans les brevets développés par Eugène Freyssinet.



7.2.2 Le voilement des coques

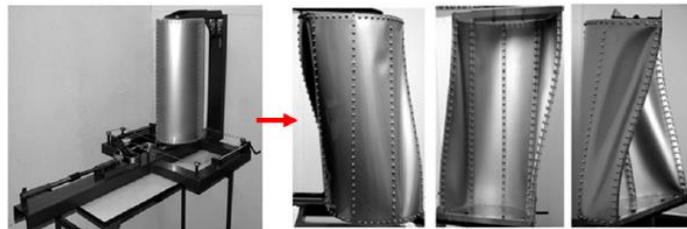
Mais cette évolution va poser un problème que ce cours sur les arcs, voûtes et dômes n'a pas encore abordé : celui du **flambement**.

Comme l'arc est en compression, il peut **flamber**.

Pour éviter le flambement dans un arc, rien de nouveau. Nous utiliserons les mêmes techniques qu'avec les poteaux : nous pouvons grossir la section ou, mieux, éloigner la matière en utilisant des tubes. Nous pouvons également casser la longueur de flambement en rajoutant des rigidités le long de l'arc.

Quand on réalise une voûte en coque mince de béton armé, c'est plus délicat. Quelques centimètres, c'est très peu. Or la voûte, tout comme l'arc, travaille en compression, sur toute sa surface (ou presque).

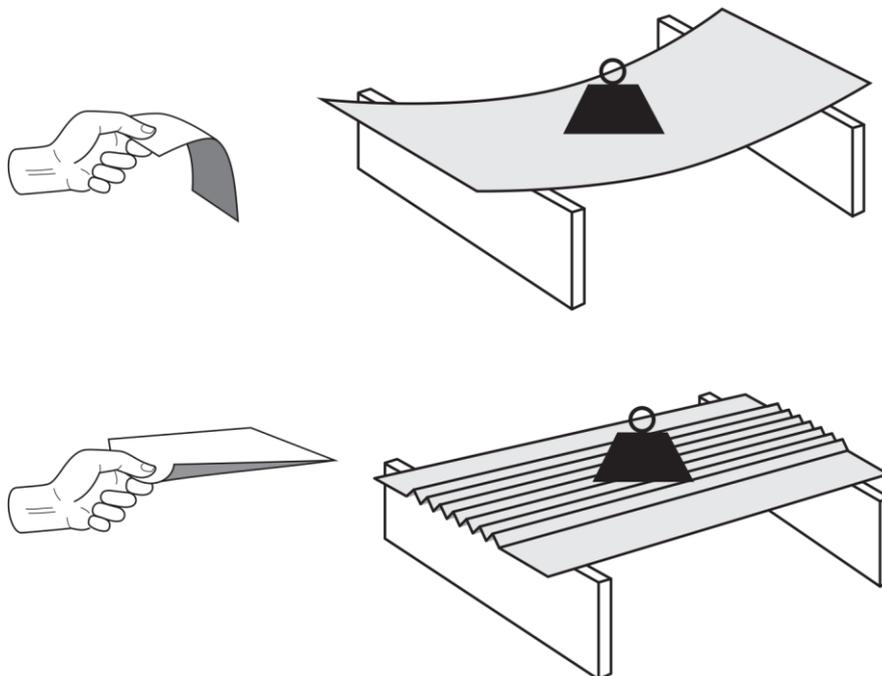
Un phénomène analogue au flambement peut apparaître brusquement sur les surfaces comprimées. On appelle cette instabilité le **voilement**.

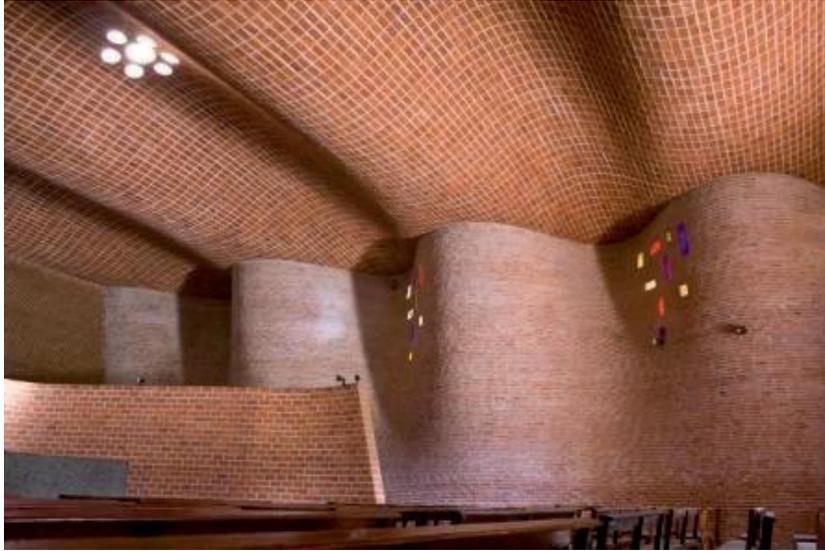


Voilement d'une surface comprimée in Coupling Experiment and Nonlinear Numerical Analysis in the Study of Post-Buckling Response of Thin-Walled Airframe Structures, Tomasz Kopecki

Le remède suit la même logique que pour un élément en une dimension : éloigner la matière pour augmenter l'inertie et donc la rigidité.

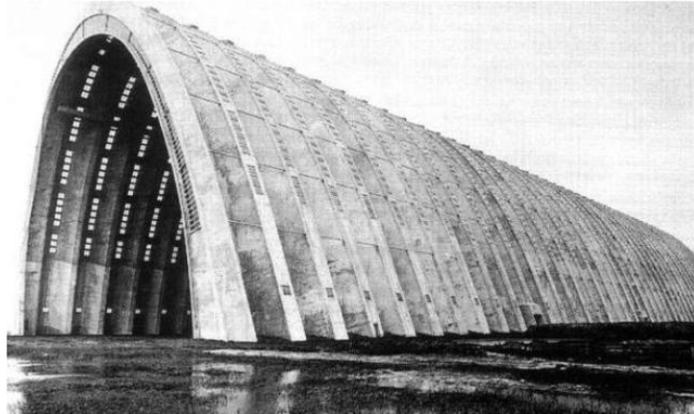
Une feuille tenue dans la main n'a pas de rigidité... sauf si je la plisse !





Voûtes plissées de la chapelle du Christ-Ouvrier, Atlántida, Uruguay, 1952, Eladio Dieste

Une méthode aussi utilisée Freyssinet pour réaliser les voûtes des hangars à dirigeables d'Orly en **voiles plissés**.



Nous pouvons aussi, par exemple, rajouter des **arceaux** aux coques. On peut en voir sur les Halles du Boulingrin quand on se positionne à l'extérieur.



Note : On pourrait croire que cette solution revient ainsi en quelque sorte au système structurel des premières voûtes constituées d'arcs et de remplissage.

Ce n'est pas totalement vrai. Ici les arceaux servent surtout à éviter le flambement tandis que pour le parcours des charges, c'est bien l'ensemble de la coque qui travaille.

En plissant le voile, on éloigne la matière sans l'épaissir.

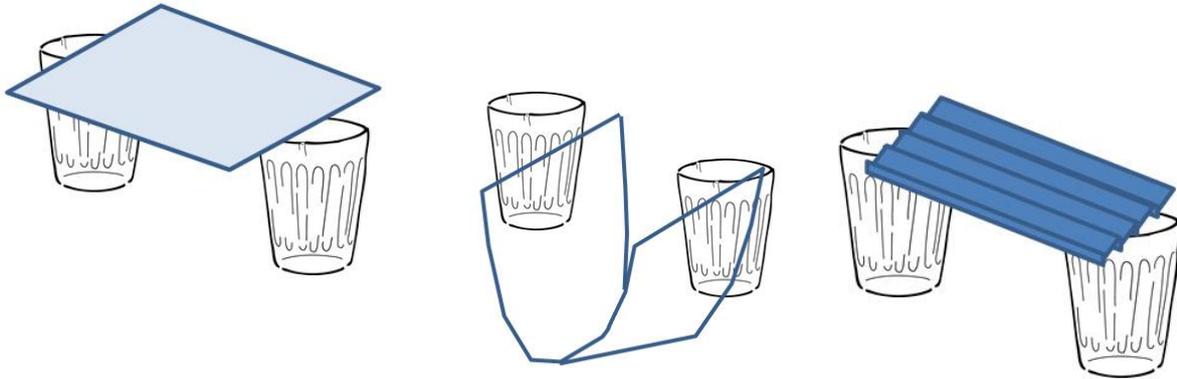
En effet, en faisant cela, on rajoute des rigidités de forme. On casse notamment la longueur de flambement.

Le principe est assez simple :

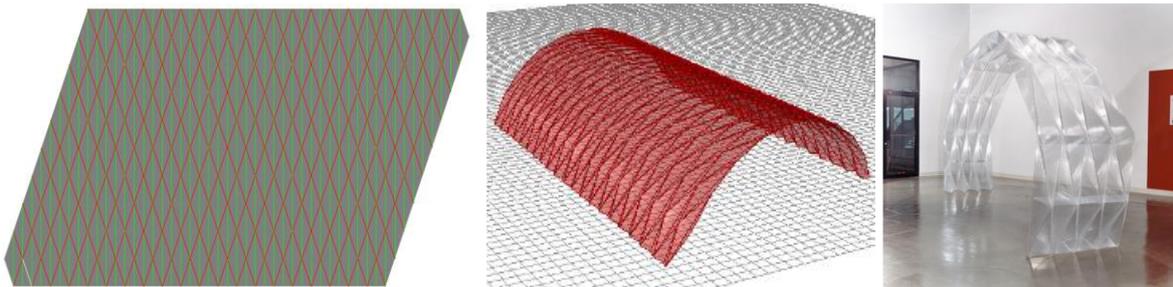
Posons deux verres sur une table et reions-les avec un pont grâce à une seule feuille de papier.

Si on la pose simplement, elle n'est pas assez rigide et elle tombe.

Cependant, si on plisse la feuille et qu'on la pose sur les verres, ça tient.



Un dôme plissé peut également être réalisé avec, par exemple, un pli simple très proche celui de la bombe à eau. Une technique utilisée par Yeh Studio (à droite).



Revenons au voilement, il y a encore une autre solution : on peut **nervurer** les voûtes comme sur les hangars de l'aviation militaire italienne réalisés par l'ingénieur Pier Luigi Nervi. Il en construira plusieurs dont celui d'Orvieto.

Les nervures des hangars pour l'aviation militaire italienne de Pier Luigi Nervi sont réalisées en éléments préfabriqués selon un système breveté par Nervi en 1939 : les éléments droits sont préfabriqués en usine et assemblés sur chantier.

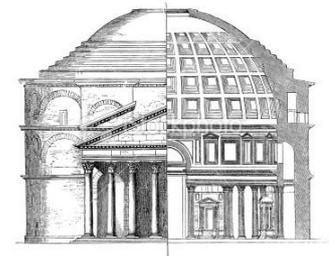
Seuls les nœuds reliant les éléments droits sont donc coulés sur place. Alors qu'il s'agit d'une des premières utilisations du béton préfabriqué de l'histoire.

Les hangars sont tous détruits par les Allemands en 1944, cependant les photographies prises par le Studio Vasari permirent d'en garder une trace. Elles furent publiées à partir de 1938 dans de prestigieuses revues d'architecture comme *Architectural Record*.



Remarque : Déjà au premier siècle avant Jésus Christ, les romains réalisaient le Panthéon de Rome avec une coupole nervurée.

Pourtant, si le résultat est le même, le raisonnement fut probablement renversé : il est possible que les nervures du Panthéon apparurent en évitant un dôme épais pour le rendre plus léger, alors que celles de Nervi furent ajoutées à la coque pour la rendre plus rigide.



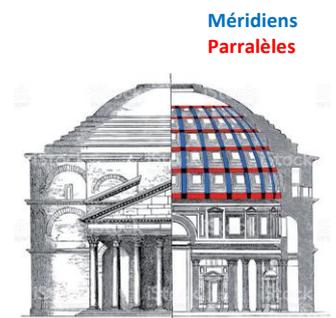
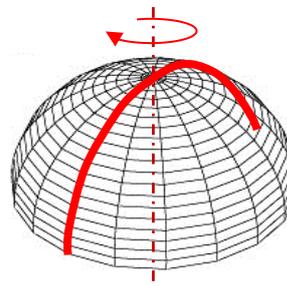
Cependant, le Panthéon de Rome n'est pas une voûte en berceau, mais un dôme.

7.3 Les dômes

7.3.1 Présentation

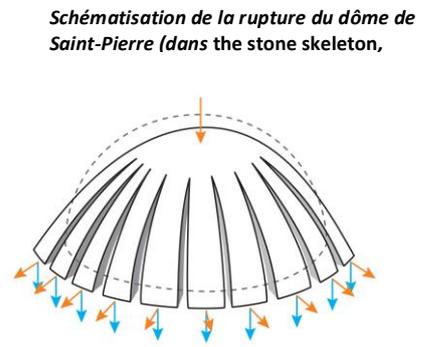
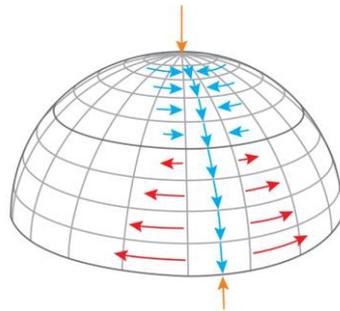
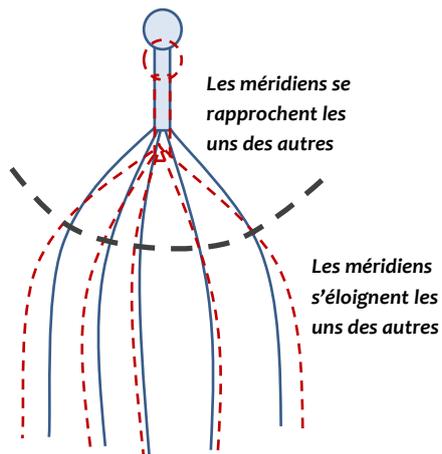
Définition : un dôme un dôme est une aussi une voûte, mais sa surface est créée par la **rotation** d'un arc autour de son axe central.

Les arcs qui le composent sont les **méridiens** et ils sont reliés entre eux par des **parallèles** : les cercles transversaux horizontaux.



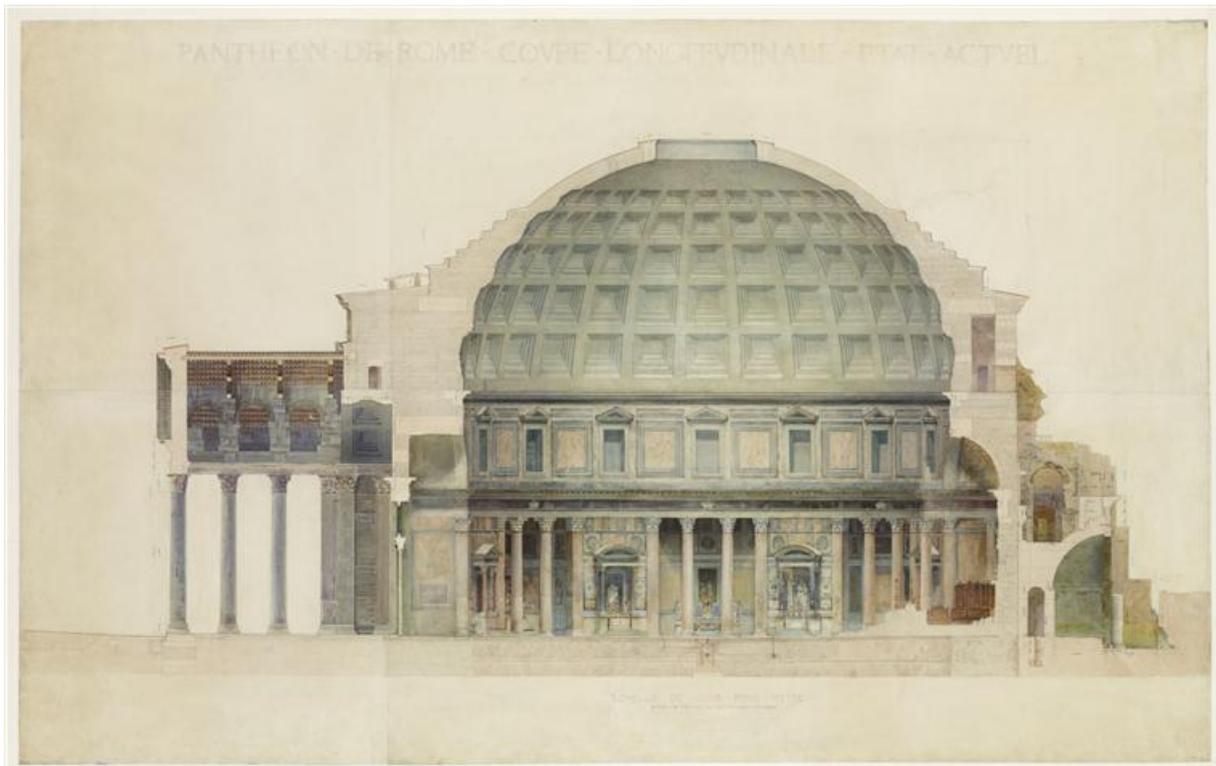
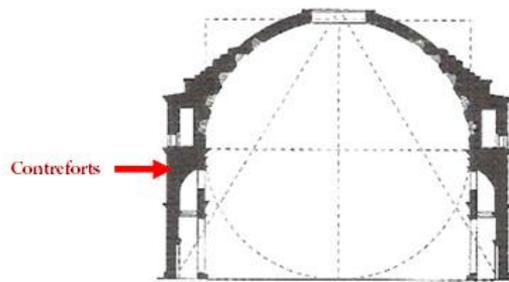
Fonctionnement :

- Les méridiens sont en compression
- Les parallèles au-dessus d'un angle de 50° à 60° sont comprimés et celles du dessous tendues. Pour le comprendre, imaginez un peigne de massage pour la tête sur lequel vous appuyez.



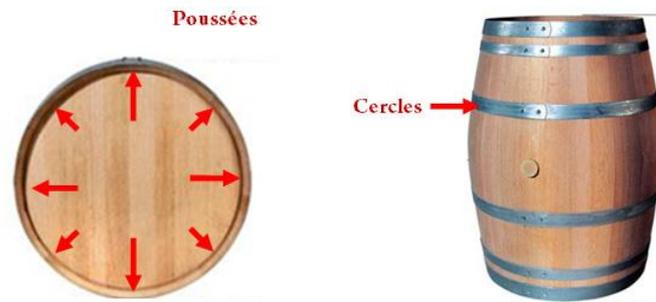
Si les poussées au vide ne sont pas reprises, les éléments constitutifs du dôme se désolidariseraient et le dôme se rompt.

La plus simple des méthodes est de les reprendre par des contreforts comme c'est le cas sur le dôme du Panthéon de Rome.



Il existe pourtant une autre solution, directement inspirée de la barrique ou du tonneau.

Les planches d'un tonneau rempli de liquide subissent la poussée de celui-ci. Le tonneau ne tiendrait pas s'il n'existait pas les cerces métalliques qui sont mises en traction par la pression du liquide et permettent par leur cerclage de tenir les planches.



Sur ce principe, on peut placer un anneau de traction à la base du dôme : il reprendra la poussée horizontale.

Par exemple, quatre chaînes en fer ont été disposées entre les deux coupôles de la basilique Saint Pierre de Rome pour la restaurer après l'apparition de fissures.

On peut également citer l'anneau de traction en béton armé du Petit Palais des Sports de Rome, une autre œuvre de Pier Luigi Nervi.



Enfin, pour éviter le **voilement** (flambement des surfaces comprimées), on utilise les mêmes techniques que pour les voûtes. Par exemple, dans le Palais des Sports de Rome de Nervi, on retrouve les nervures qui lui sont chères. La coupole du CNIT est, elle, réalisée par une double coque très mince et plissée. Enfin, Il est également possible de réduire la longueur de flambement en rajoutant des anneaux horizontaux, sur le modèle du tabouret de bar.



Funiculaire sur les dômes : une vidéo à voir : Armadillo Vault, Block Research Group (ETH Zurich) - <https://vimeo.com/167868985>



7.3.2 La mise en charge

Une dernière problématique propre aux arcs, aux voûtes et aux dômes n'a pas encore été évoquée : celle de la **mise en charge**.

Il s'agit d'un des principaux problèmes sur le **chantier**.

Arcs, voûtes et dômes fonctionnent généralement en compression. Mais pour que cela soit exact, **ils doivent contenir une forme en cosinus parabolique, le funiculaire des forces**.

Cependant, on a précisé que **le funiculaire des forces dépend du chargement étudié**. La chaînette a pris cette forme très particulière lorsqu'elle avait des poids également répartis sur toute sa longueur. Le funiculaire des forces correspond donc souvent à un **chargement uniforme**, ce qui est une modélisation assez proche de la réalité.

Si, à un moment, le chargement n'est pas uniforme, s'il était asymétrique par exemple (comme en cas de neige et de fort vent, la neige peut se concentrer sur la moitié du dôme), alors le chargement ne correspond plus à celui du funiculaire des forces. Une partie du dôme peut se trouver **décomprimée** et le dôme risque de s'effondrer.

Ce problème se retrouve sur le chantier. Les arcs, les voûtes et les dômes ont besoin d'être **cintrés**, c'est-à-dire **étayés** pendant leur construction.

Lorsqu'on enlève les étais, ceux-ci ne reprennent plus les charges et le dôme commence à fonctionner, c'est ce qu'on appelle la **mise en charge**.

Le problème apparaît si nous enlevons les étais partie par partie. **Alors on met en charge seulement un morceau du dôme** tandis que le reste est toujours soutenu par les étais. Or le dôme n'a pas été conçu pour ce cas de charge, qui suit un funiculaire des forces différent de celui qui a servi à la conception du projet : il va donc se décompresser localement et s'effondrer.

Pour éviter cela, deux solutions :

- **Solution 1** : Retirer tous les étais exactement en même temps.

Plusieurs possibilités s'offrent aux constructeurs. La plus ancienne, et la seule utilisée pendant très longtemps, consistait à construire les étais sur des boîtes remplies de sable très sec avec un trou à la base obstrué par un bouchon.

Au signal du contremaître, les ouvriers enlevaient tous les bouchons exactement en même temps, le sable se vidait alors des boîtes provoquant l'affaissement uniforme des étais : le dôme se mettait ainsi en charge. Cependant, les boîtes à sable demandent beaucoup de main d'œuvre.

Aujourd'hui, on utilise plutôt des vérins hydrauliques et un système électronique qui permet de les abaisser tous en même temps.

- **Solution 2** : Réaliser un dôme autoportant (qui n'a pas besoin d'être étayé), même en cours de construction.

En 1418, un concours est lancé pour la construction du dôme de Santa Maria del Fiore à Florence. Après quelques hésitations, le projet est finalement confié à Filippo Brunelleschi.

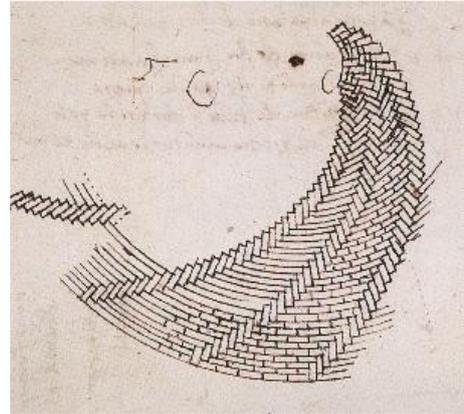
La réalisation d'un cintre de bois pour une coupole de 42 mètres de diamètre était un véritable obstacle : quasi impossible techniquement et très cher.

Brunelleschi utilise alors une disposition très particulière des briques appelée en Italien en *spina di pesce* (c'est-à-dire en **arête de poisson**) inspirée des techniques des Étrusques.

Les spirales de briques verticales ainsi créées entre les lits de briques horizontales répartissent le poids à tout moment de la construction en déviant la poussée vers les angles de l'octogone.

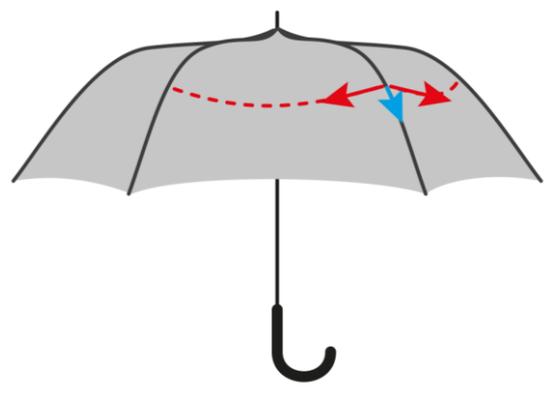
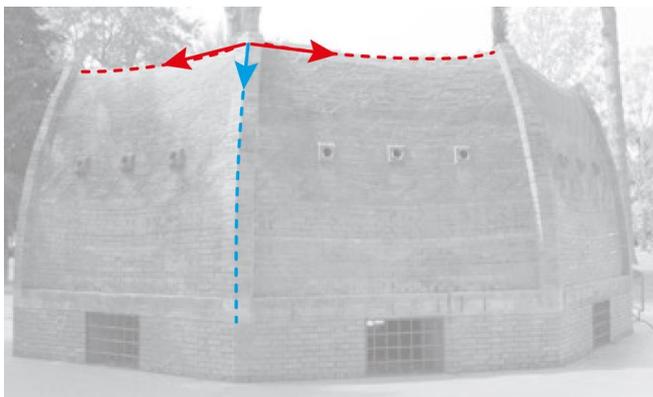
La structure devient **autoportante**. Cela veut dire qu'elle se porte toute seule et sans cintrage, même pendant la construction.

On voit cette disposition particulière des briques sur la petite maquette du dôme que les archéologues italiens ont retrouvée en 2013 (ci-contre).



De plus, on retrouve des chaînettes, localement, dans chaque pan du dôme : les lits de brique ne sont en réalité pas sur le même plan, ils forment une parabole vers le bas, comme un caténaire sous son poids propre. En traction, cette forme permet sans doute d'équilibrer la poussée des contreforts, de la même façon que le tissu tendu d'un parapluie empêche les baleines de trop s'ouvrir.

Brunelleschi a en quelque sorte exploité l'effet de membrane, simplement grâce à une disposition réfléchie des briques, en forme de chaînette, deux siècles et demi avant que Hooke n'énonce le principe du funiculaire !

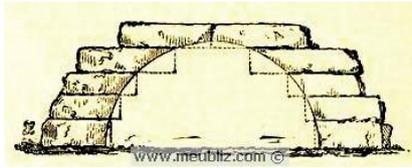


Une méthode encore plus ancienne est très efficace pour les arcs ou les voûtes qui peuvent alors être réalisés sans cintre.

Les voussoirs sont mis en compression et maintenus en place par des poids pendants au bout de cordages.

John Fitchen, The construction of Gothic Cathedrals

La méthode de construction par **encorbellement** permet également de se passer de cintres



Exemple d'arc en encorbellement.



Les trulli, habitats typiques de la région des Pouilles (Italie) sont des dômes construits en encorbellement.

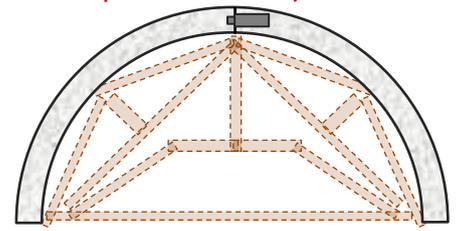
Enfin, citons deux idées ingénieuses de Freyssinet .

La première est le décintrement par vérinage, employé pour la première fois sur le pont de Prairéal-sur-Besbre.

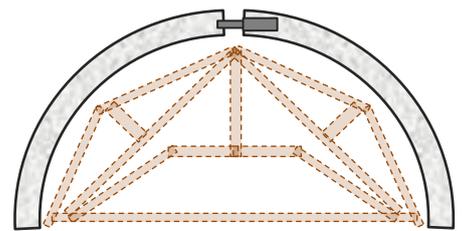
Un vérin placé au niveau de la clef de voûte permet de déplacer les deux demi-arcs après leur construction. Cela libère immédiatement le cintre.



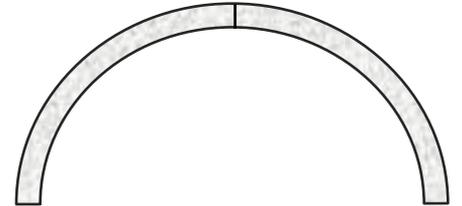
1 – Construction de l'arche, mise en place du vérin à la clef



2 – Actionnement du vérin, les demies-arcs se séparent et libèrent le cintre



3 – Retrait du cintre ainsi libéré



La pression exercée par les arcs et les voûtes doit être équilibrée à la base par une tension, dans un câble par exemple.

En suivant ce raisonnement à rebours, on peut utiliser la mise en tension de tirants avant décintrement pour faciliter celui-ci.

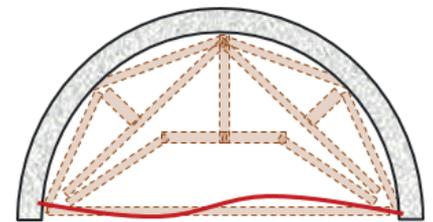
Ce procédé a été utilisé pour la construction des arcs à double courbure (celle-ci augmente leur rigidité) du double hangar d'aviation de Marignane (Auguste Perret architecte, Nicolas Esquillan ingénieur, 1952 ; entreprise : Bourrison), constitué de voiles minces de 6 cm de béton armé portant sur 101,5 m !

Les arcs, ou "ondes", étaient posés sur des cintres roulants, une autre invention d'Eugène Freyssinet. Les câbles destinés à reprendre leur poussée au vide ont été prétendus alors que les ondes étaient toujours étayées par le cintre, donc soulagées de toute compression. La mise en tension a introduit de la compression dans les voûtes, qui se sont alors légèrement soulevées et ont libéré le cintre. Dans ce système, **c'est la tension des tirants qui entraîne la libération de la voûte et donc sa mise en charge, et non l'inverse.**

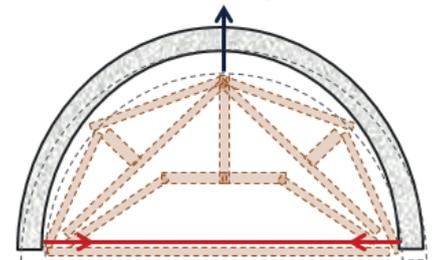
Cela fut un des tout premiers pas vers la précontrainte



1 – Construction de l'arche, mise en câble du câble non rendu



2 – Mise en tension du câble, l'arche se soulève



3 – Retrait du cintre ainsi libéré

