

## CM : **STRUCTURE 2**

CYCLE LICENCE S3/S4

Marc LEYRAL – Sylvain EBODE



*Stade Olympique de Munich, Allemagne, Günther Behnisch et Frei Otto, 1968 - 1972*

### **S2-C8**

## **LES STRUCTURES SOUS-TENDUES ET LES MEMBRANES**

*Présentation de ces archétypes structuraux*

# ECHAUFFEMENT

Chaque cours commence par un petit exercice d'échauffement, afin de rendre ludique l'usage des mathématiques et de la logique

## Petite multiplication

On multiplie tous les nombres impairs de 1 à 2019.

Par quel chiffre se termine le résultat final ?

Réponse : 5  
Explications :

- Il y a 5 dans la multiplication.
- Tout nombre impair multiplié par un nombre impair est impair :
- Soit deux nombres impairs quelconques et positif. On peut les écrire sous la forme  $(2N + 1)$  et  $(2M + 1)$  où  $N$  et  $M$  sont des entiers positifs.  
Or  $(2N + 1) \times (2M + 1) = 2NM + 2N + 2M + 1 = 2(NM + N + M) + 1$  impair
- Enfin, tout nombre impair multiplié par 5 se termine lui-même par 5 :  
 $5 \times (2N + 1) = 10N + 5$

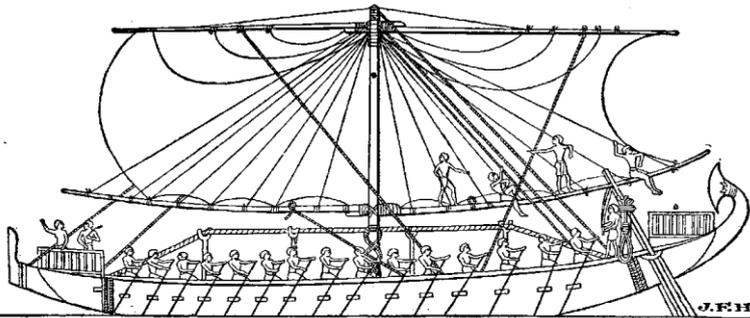
# Rappels de cours (S1-C8 - Les systèmes réticulés)

## LES SYSTÈMES RÉTICULÉS

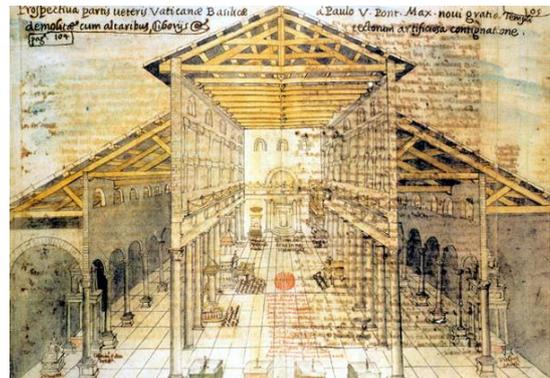
### Petit historique des treillis

**Étymologie** : En anglais, treillis se dit *truss*, du vieux français *trousse* (« faisceau de choses liées ensemble »)

- Les Égyptiens en réalisaient avec des cordages sur leurs long bateaux **dès 1250 avant JC** pour ne pas qu'ils fléchissent sous le poids de l'équipage et du chargement.
- Il faudra ensuite attendre l'ère romaine pour revoir l'apparition de treillis en bois dans la réalisation des charpentes (ci-dessous : Charpente de l'ancienne basilique Saint-Pierre de Rome, édiflée en 330 après Jésus-Christ) .



*Egyptian ship on the Red Sea, about 1250 B.C. [From Torr's "Ancient Ships."]  
Mr. Langton Cole calls attention to the rope truss in this illustration, stiffening the beam of the ship. No other such use of the truss is known until the days of Modern engineering.*



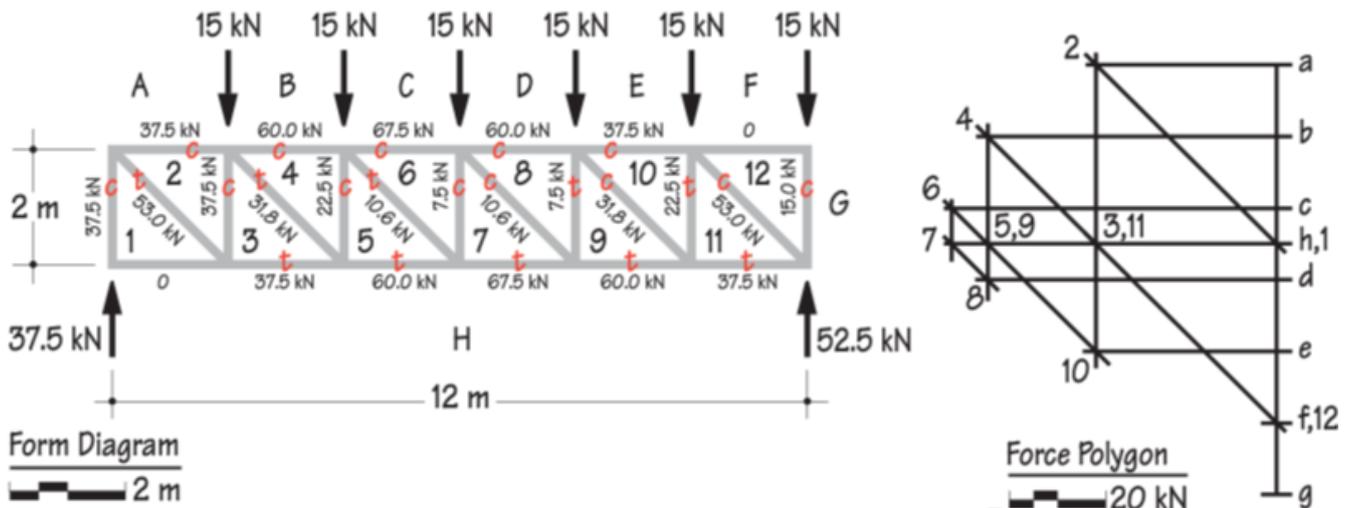
### Fonctionnement :

- Un treillis est **une structure réticulée** plane ou tridimensionnelle constituée de barres
- Elle est dite réticulée lorsque tous les organes de liaisons sont des **rotules**.
- De ce fait, les barres travaillent uniquement en **compression** et en **traction**
- Pour être auto-stable, les constructions treillis doivent être constituées de **triangles**
- La forme optimum pour une répartition idéale des efforts est le treillis constitué de **triangles isocèles rectangles**



### Trois méthodes pour le calcul :

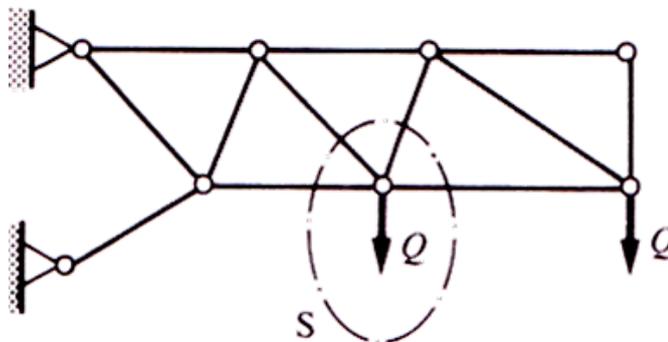
## 1 – Méthode Graphique (Bow, Cremona) :



## 2 – Méthode des nœuds :

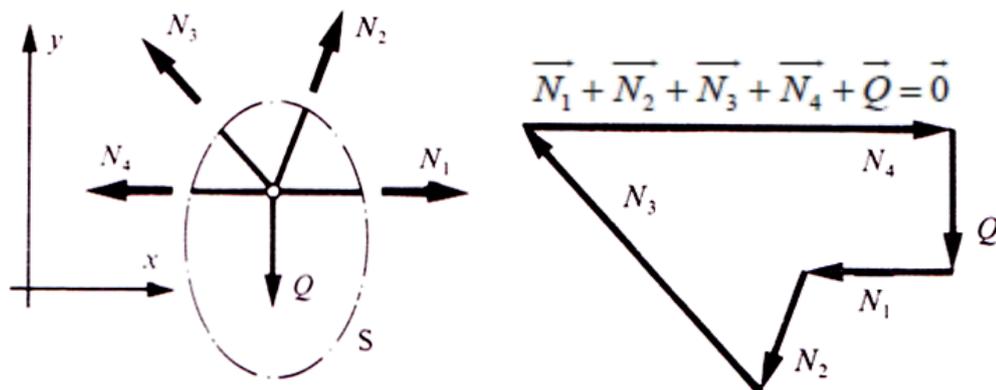
- Étape 1 : isoler le nœud
- Étape 2 : indiquer les forces des barres
- Étape 3 : trouver les forces analytiquement ou graphiquement

**Étape 1 :** isoler le nœud



**Étape 2 :** indiquer les forces des barres

**Étape 3 :** trouver les forces analytiquement ou graphiquement

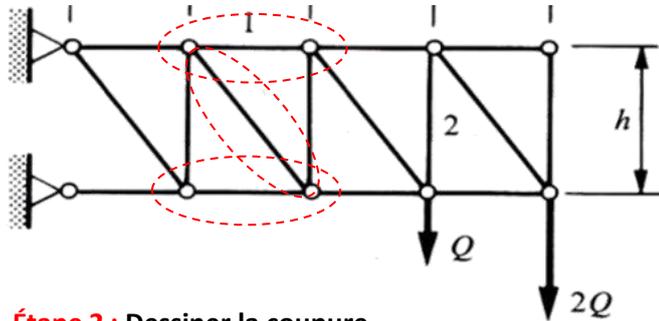


## 3 – Méthode de la section de Ritter :

- Étape 1 : Choisir les barres

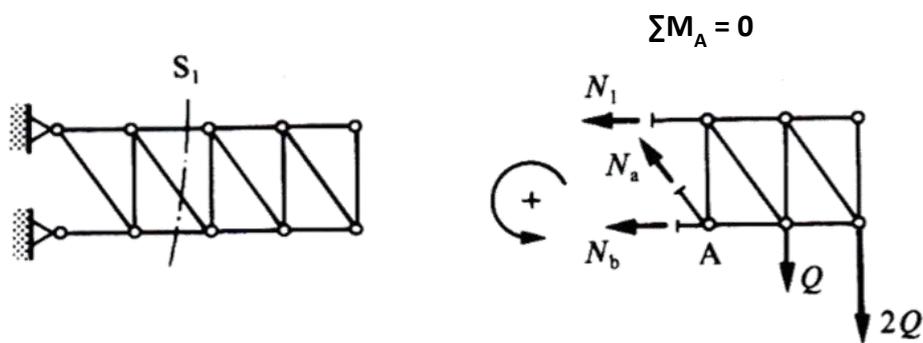
- Étape 2 : Dessiner la coupure
- Étape 3 : trouver les forces

**Étape 1 : Choisir les barres**

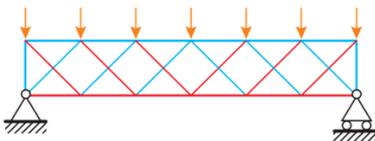
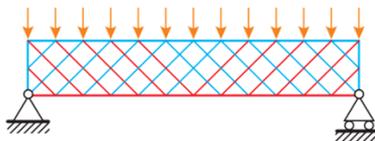
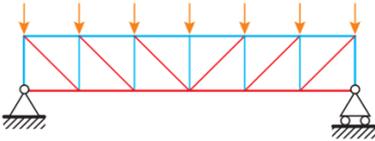
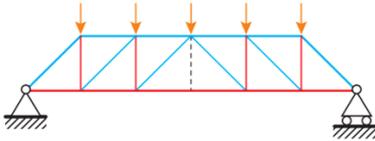
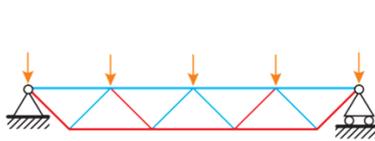
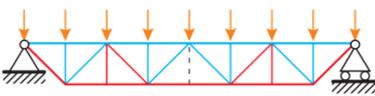
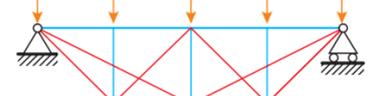
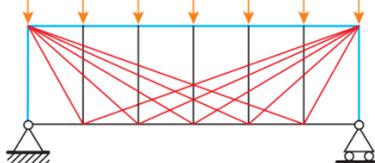


**Étape 2 : Dessiner la coupure**

**Étape 3 : trouver les forces**



**Les différents types de treillis :**

<p>Fermes (nombreuses familles existantes)</p> <p>— Compression — Traction</p>	<p>Treillis de type Town simple</p> 	<p>Treillis de type Town double</p> 
<p>Treillis de type Pratt</p> 	<p>Treillis de type Howe</p> 	<p>Treillis de type Warren sans montants</p> 
<p>Treillis de type Warren avec montants</p> 	<p>Treillis de type Fink</p> 	<p>Treillis de type Bollman</p> 

# Sommaire du cours

<b>SOMMAIRE DU COURS</b>	<b>6</b>
<b>8 LES STRUCTURES SOUS-TENDUES ET LES MEMBRANES</b>	<b>7</b>
<b>8.1 Le treillis de type Fink</b>	<b>7</b>
8.1.1 Présentation	7
8.1.2 Premier pas vers la sous-tension	7
<b>8.2 Les structures sous-tendues</b>	<b>8</b>
8.2.1 Problématique	8
8.2.2 Description	8
8.2.3 Applications	9
8.2.3.1 Ponts	9
8.2.3.2 Façades	9
8.2.4 Précontrainte	10
<b>8.3 Les réseaux de câbles</b>	<b>12</b>
8.3.1 Principe	12
8.3.2 Les poutres à câbles	12
8.3.3 Les réseaux de câbles	13
8.3.4 Les membranes	15

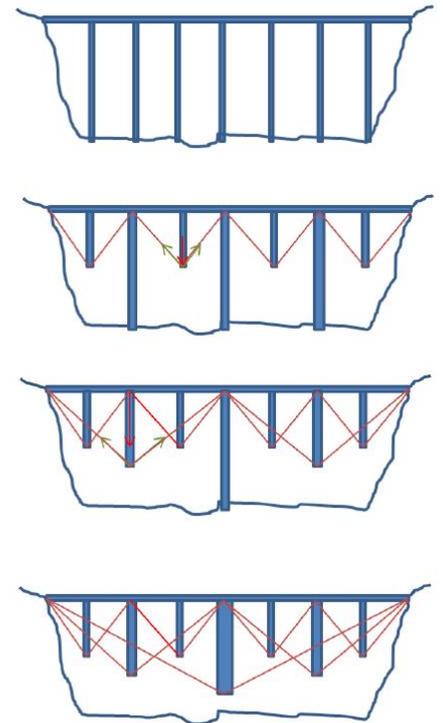
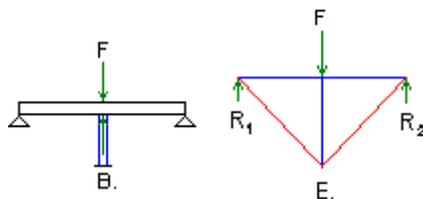
## 8 Les structures sous-tendues et les membranes

### 8.1 Le treillis de type Fink

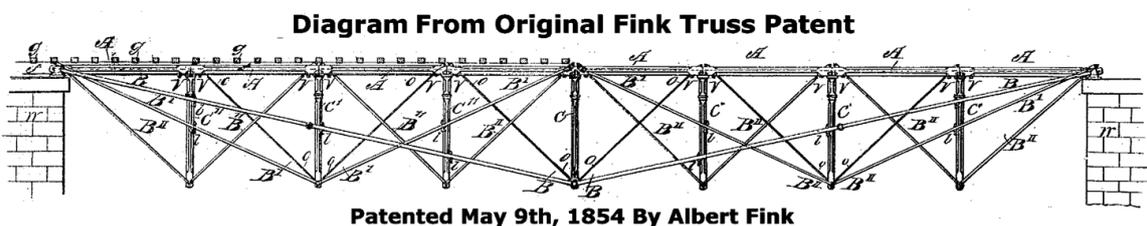
#### 8.1.1 Présentation

Pour comprendre comment fonctionne ce treillis à la forme si particulière, considérons un pont avec sept piles. Pas facile à construire, surtout si le ravin est profond.

On commence alors par couper une pile sur deux. Mais si la charge ne descend plus, c'est comme doubler la portée, le pont ne peut pas le supporter, il faut alors rajouter des barres en traction qui vont remonter la charge sur les piles voisines. Il suffira alors juste d'élargir un peu les piles voisines qui reprennent deux fois plus de charges.



Maintenant coupons de nouveau une pile sur deux sur celles qui restent. On remonte alors la charge avec des barres tendues sur le même modèle que précédemment. Enfin, on répète l'opération une dernière fois.



HistoricBridges.org

Source : *Comment tout ça tient ? Voyage au pays des structures* – Michel Provost et Philippe de Kemmeter

#### 8.1.2 Premier pas vers la sous-tension

Ces structures permettent de faire la transition vers une nouvelle typologie : les barres tendues, s'agissant d'un treillis, ne sont le lieu d'aucun effort tranchant ni d'aucun moment fléchissant. Or un câble est l'élément idéal pour reprendre des tractions pures. On pourrait alors remplacer les barres tendues par des câbles, mettant ainsi un premier pied dans le monde des structures sous-tendues.



## 8.2 Les structures sous-tendues

**Rappel** : Les treillis sont des structures réticulées, c'est-à-dire que les éléments qui le composent sont tous articulés les uns aux autres. Comme les rotules ne transmettent pas les moments, **les barres fonctionnent soit en compression simple, soit en traction simple**.

Enfin, nous avons vu le treillis de Fink et nous avons suggéré de remplacer les éléments simplement tendus par des câbles, réalisant par là même un premier pas dans le monde des structures sous-tendues.

### 8.2.1 Problématique

Comme il a déjà été évoqué, un des principaux enjeux d'une poutre, élément de franchissement, est sa **raideur en flexion**.

Pour traverser de **grandes portées**, c'est un véritable casse-tête : **si la raideur n'est pas assez élevée, la poutre fléchit trop**.

On a également vu que, **pour augmenter la raideur flexionnelle, il fallait éloigner la matière en compression (celle de la partie haute) de la matière en traction (en partie basse de la poutre)**.

Nous avons déjà évoqué plusieurs moyens :

- plisser une coque
- faire un arc
- faire une poutre en treillis

La structure sous-tendue remplit le même but. Elle découle des treillis et permet d'introduire la précontrainte.

### 8.2.2 Description

Commençons par revenir au problème initial, une poutre permet de franchir une portée. Mais si elle n'est pas assez raide, alors elle fléchit trop. Le but est donc de la « remonter ».

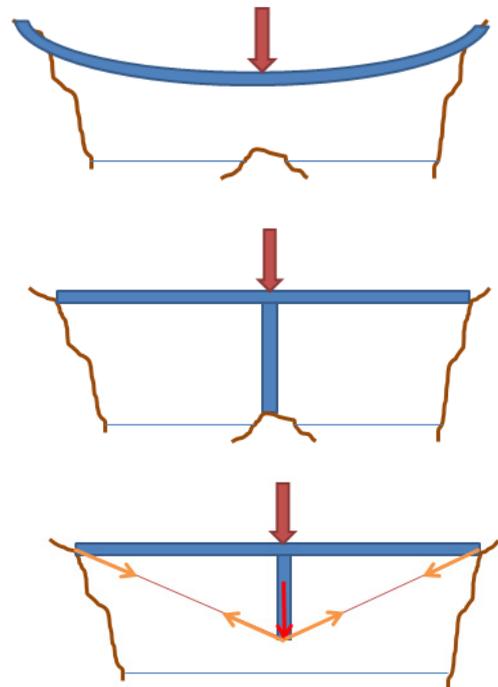
Si on rajoute une pile intermédiaire, cela va mieux. Mais si le ravin à franchir est trop profond, il faut une autre solution. Il faut alors s'inspirer des connaissances apprises sur le treillis de type Fink.

On remplace la pile par un étai en compression, une **entretoise**, et on tend un câble du bas de cet étai vers les culées sur les bords. Ainsi, si une charge tend à faire fléchir le pont, cet affaissement provoqué par la déformation du tablier va automatiquement tendre les câbles.

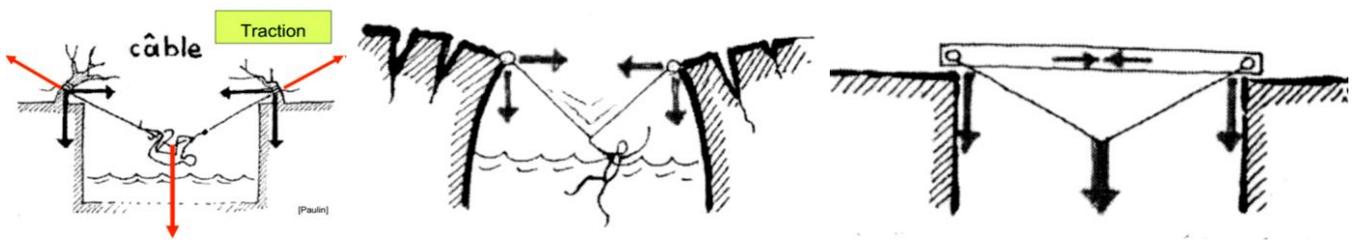
La tension dans les câbles va « remonter » le pont vers le haut et donc lutter contre la flexion.

Les éléments sous-tendus fléchissent peu. Cela vaut dire que **leur raideur a augmenté**. Donc nous avons éloigné la traction de la compression, ainsi nous avons augmenté le bras de levier du moment résistant interne qui permet de lutter contre la flexion.

**La traction se situe ici dans le câble**. La traction dans le câble a pour effet de **mettre le tablier en compression**.



En effet, si on imagine le câble seul, sans le tablier, alors, sous l'effet de sa traction, la force qui arrive aux appuis est oblique. Il y a donc une composante horizontale qui a pour effet de « tirer » les appuis l'un vers l'autre. Le tablier que l'on intercale entre les appuis est donc bien mis en compression



Source : *Comment tout ça tient ? Voyage au pays des structures* – Michel Provost et Philippe de Kemmeter

## 8.2.3 Applications

### 8.2.3.1 Ponts

Ce principe est évidemment très utile pour le franchissement : couvertures de grands équipements et les ponts.

Un exemple est visible sur la passerelle des Quatre Vents du Parc des Hauteurs à Lyon.

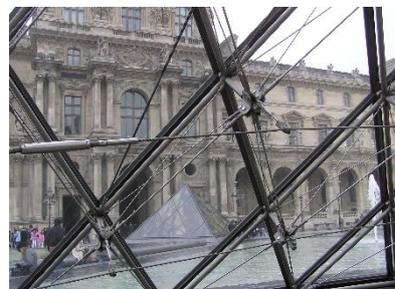
### 8.2.3.2 Façades

On retrouve également ce principe sur les grandes façades de verre qu'on peut voir dans les bâtiments modernes.

Effectivement, le verre est un matériau à comportement fragile et les murs-rideaux offrent une grande surface au vent. La résultante horizontale du vent est telle que le mur-rideau pourrait fléchir au-delà de la déformation engendrant des contraintes non admissibles par le verre. Le verre risque alors de rompre.

Pour éviter cela, on dispose des câbles par derrière le verre, éloignés de la façade par des barres en compression (équivalentes aux entretoises). Ainsi, si le vent commence à déformer la façade, ces câbles se tendent et la redressent. Le verre ne risque alors plus de se rompre.

Cette technique est très largement employée sur un grand nombre de murs-rideaux. Un exemple connu est celui de la pyramide du Louvre.



Précisions du *Moniteur* :

« La surveillance dynamique de la structure est assurée par Sites (budget 85 000 € HT/an). Mis à part les tassements courants dus au poids de la structure, l'ouvrage suit des variations de dimension dues aux changements de température quotidiens ou saisonniers. La structure est élastique et ne subit actuellement aucune déformation hors normes. Tous les ans, la rive de bord est nivelée, afin de vérifier les quatre poutres de base. Leur flèche, c'est-à-dire leur courbure, ne dépasse pas 1 à 1,5 cm selon les années, pour une tolérance maximale de 2 cm. Tous les ans, enfin, les cordistes opèrent une inspection pour vérifier visuellement l'état de la structure. »



### 8.2.4 Précontrainte

Notons que ces raisonnements sont un premier pas vers la **précontrainte**.

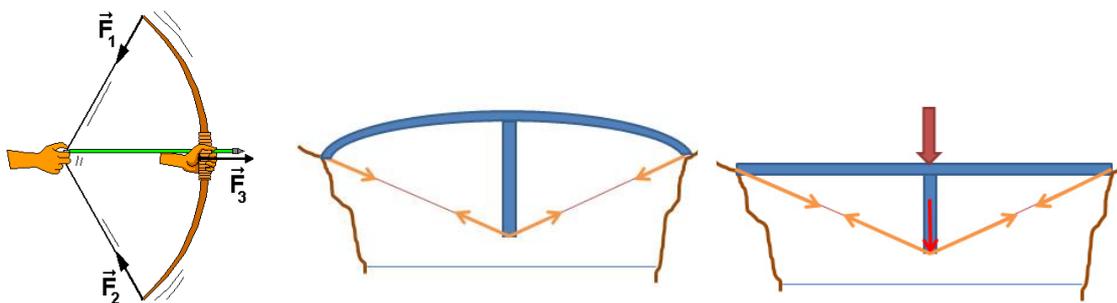
L'idée principale est d'aller plus loin. Nous pourrions maintenant lutter contre la flèche induite par la flexion par une contre-flèche.

En effet, jusqu'ici **le système est passif**. Au repos, il n'y a aucune force, ni dans le tablier ni dans les câbles.

Si une charge traverse le pont, comme on l'a vu, le tablier fléchit, le câble se tend et met le tablier en compression. Il est alors possible de transformer ce procédé en quelque chose de plus **actif**.

Le système est le même : un tablier et un câble éloignés par une entretoise. Maintenant, on tire sur les deux extrémités du câble alors que le système est au repos. On met ainsi le câble en tension, exactement comme lorsqu'on bande la corde d'un arc : la corde se tend et le bois fléchi !

En introduisant donc une tension dans le câble au repos, celui-ci va « remonter » le tablier, le faire **fléchir vers le haut**. C'est ce qu'on appelle une **contre-flèche**. On la réalise sur l'édifice alors qu'il n'est pas encore chargé.



Ainsi sous chargements permanent, la flexion va abaisser le pont et celui-ci apparaîtra plat.

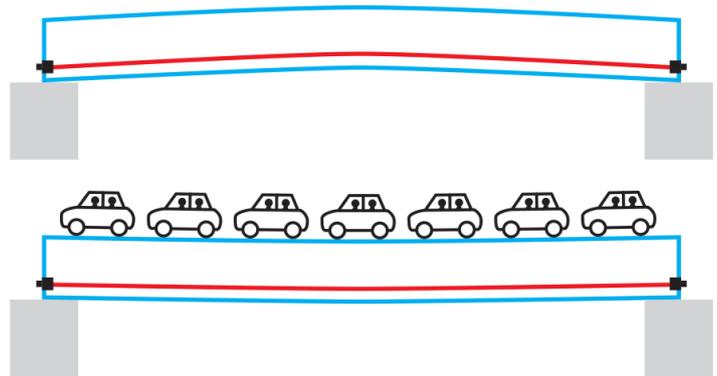
La **précontrainte** utilise quasiment la même idée : on introduit un câble dans une poutre, le câble est mis en tension, soit avant le coulage (**pré-tension**), soit après (**post-tension**). Il est alors bloqué contre le béton.

La tension du câble va introduire une contre-flèche dans la poutre, exactement comme la structure sous-tendue par une pré-tension que nous venons de voir.

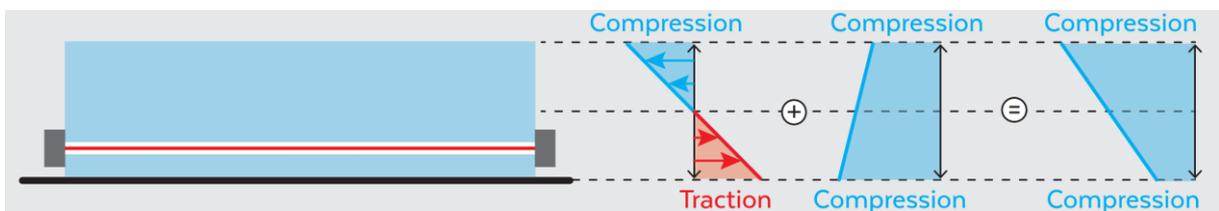
Le deuxième avantage c'est que le câble va mettre la poutre en compression, exactement comme le câble du pont sous-tendu comprimait le tablier.

Or la flexion d'une poutre a pour effet d'induire de la traction dans sa membrure inférieure et de la compression dans la membrure supérieure.

De fait, si la compression introduite par la précontrainte est supérieure à la traction provoquée par la flexion, la résultante sera positive, ce qui veut dire que toute la poutre restera comprimée.



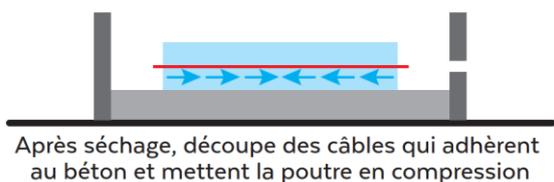
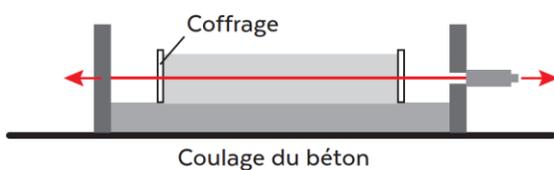
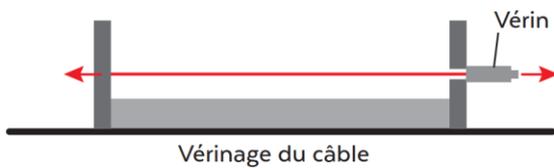
Flexion : + Précontrainte : = Résultante :



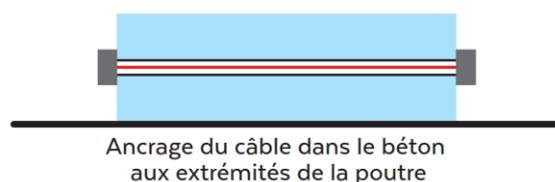
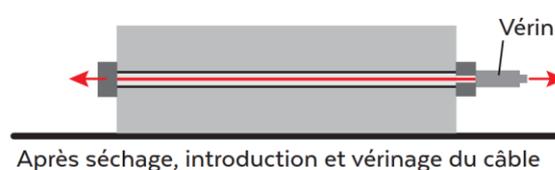
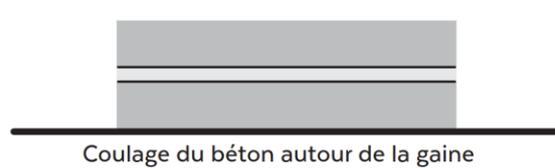
Le béton seul est alors capable de reprendre les efforts, sans armatures supplémentaires.

Le brevet a été déposé en 1928 par Eugène Freyssinet.

Précontrainte par pré-tension :



Précontrainte par post-tension :



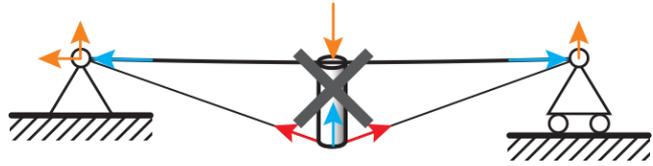
Source : *Construire l'architecture : la structure* – Marc Leyral

## 8.3 Les réseaux de câbles

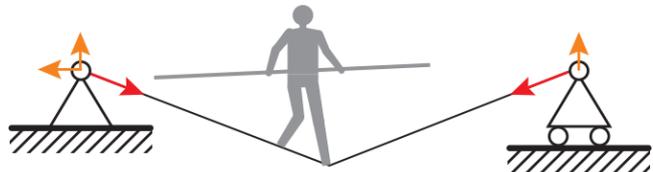
### 8.3.1 Principe

Repartons de la poutre sous-tendue.

Imaginons que la portée soit telle que le tablier en compression ne soit pas réalisable.

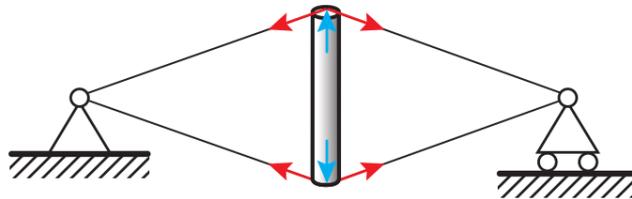


Il faudrait pouvoir traverser sur le câble. Celui-ci adaptera son funiculaire des forces à chaque pas, et il se déformera donc beaucoup.



N'étant pas lesté, il se déplacera aussi beaucoup latéralement sous l'effet de petites sollicitations horizontales.

La solution est alors de tendre un deuxième câble au-dessus de l'entretoise, à la place de la poutre. Ainsi les deux câbles se tendront mutuellement : on obtient alors une **structure autotendue**.



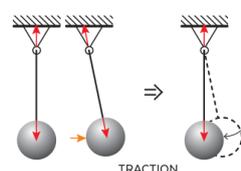
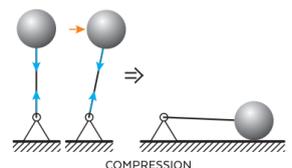
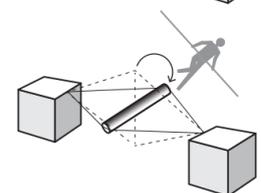
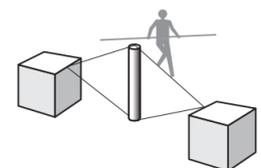
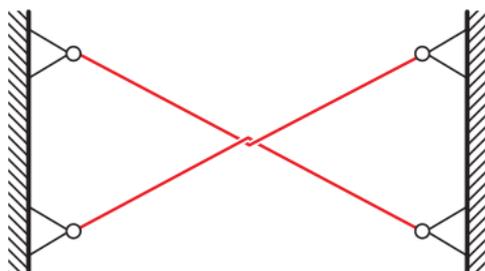
### 8.3.2 Les poutres à câbles

Cette structure reste instable latéralement (à moins qu'elle soit lestée, tel un pont suspendu).

Cela est dû à la présence d'un élément en compression – la traction étant naturellement plus stable – en son sein.

La solution consiste à alors à supprimer l'entretoise et à tendre directement le câble avec le second câble, positionné en-dessous.

Ces principes permettent de former les **poutres à câbles**.



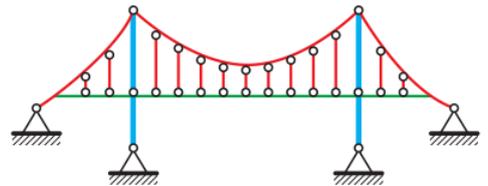
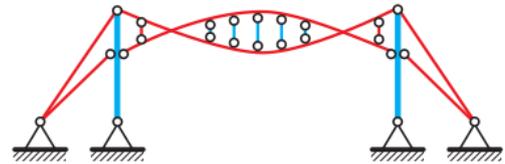
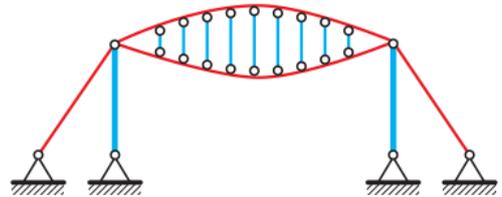
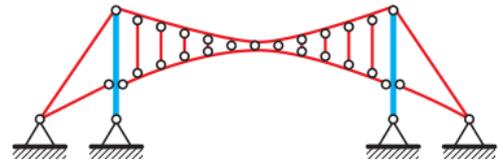
**Exemples de poutres à câbles et de structures lestées (pont suspendu).**



*Tribune de l'Ajax Amsterdam, 1996, René van Zuuk*



*Papeterie Burgo à Mantoue, Italie, 1961 - 1962, Pier Luigi Nervi.*

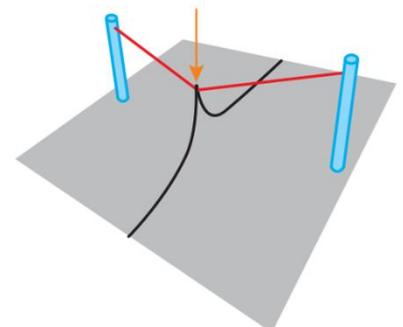
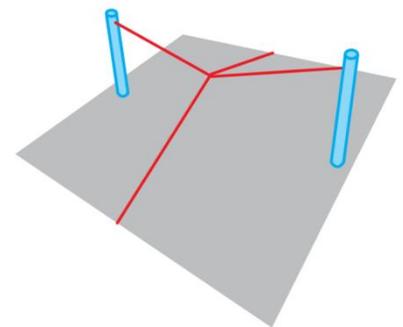
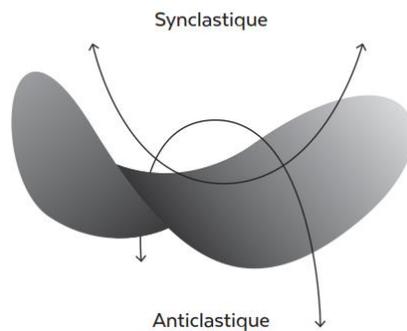


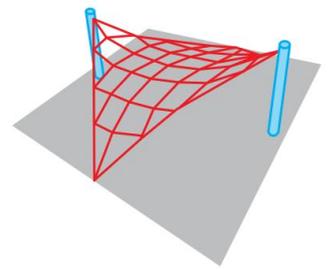
**8.3.3 Les réseaux de câbles**

Cette structure manque encore de stabilité latérale : pourquoi ne pas tendre alors, comme pour une tente de camping, le deuxième câble de façon perpendiculaire ?

Ce type de structure nécessite deux conditions :

1. Les deux courbures doivent être inverses : on parle de **forme anticlastique**.
2. Au moins un des câbles doit être **prétendu** (sinon le moindre chargement détendrait une des deux nappes de câbles)



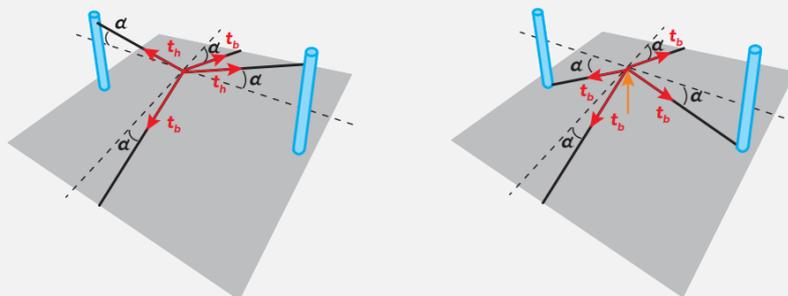


En répétant cette opération sur un grand nombre de câbles, on obtient un **réseau de câbles** (deux nappes de câbles orthogonales), de forme de paraboloid hyperbolique ou, plus communément, une forme de selle de cheval.



*J. S. Dorton Arena, Raleigh, Caroline du Nord, Etats-unis, 1952, Maciej Nowicki architecte.*

**Démontrons la nécessité de la forme anticlastique.**



Admettons que la tension du câble du haut vaut  $t_h$  et celle du bas  $t_b$ , et qu'ils forment chacun le même angle  $\alpha$  avec l'horizontale.

Si l'on isole le nœud formé par le croisement des câbles, celui-ci étant en équilibre, on peut appliquer le principe fondamental de la statique sur les forces verticales :

$$\sum F_y = 2 \times t_h \times \cos(\alpha) - 2 \times t_b \times \cos(\alpha) = 0.$$

Soit :  $2 \times t_h \times \cos(\alpha) = 2 \times t_b \times \cos(\alpha)$ , donc  $t_h = t_b$ .

La tension est identique dans les deux câbles.

Maintenant, si les câbles étaient dans le même sens, on aurait :

$$- 2 \times t_h \times \cos(\alpha) - 2 \times t_b \times \cos(\alpha) = 0, \text{ donc } t_h = - t_b.$$

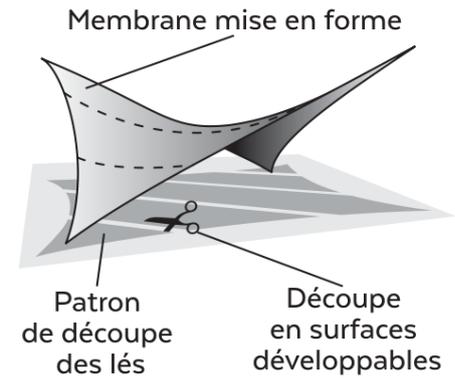
Cela signifie que si l'un des câbles est en traction, l'autre est en compression, ce qui est impossible pour un câble... sauf si on a une force supplémentaire vers le haut : c'est le cas des structures gonflables !

### 8.3.4 Les membranes

Enfin, lorsque les câbles sont si rapprochés qu'ils se touchent presque, ils deviennent un tissu : ce sont les **membranes**. Ouvrages textiles, ils se distinguent des toiles posées (comme sur les tipis) par le fait qu'ils participent à la structure.

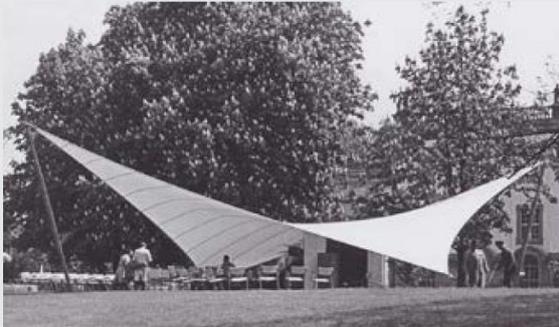
On trouve leur forme par la méthode de la relaxation dynamique, explicitée dans l'ouvrage de Marc LEYRAL.

Leur mise en œuvre se fait par la **découpe de lés**, obtenus par la mise à plat de la **surface développable**.



**Frei Otto** fut un des grands promoteurs de ces structures.

#### LES DIFFÉRENTS TYPES DE MEMBRANES



Auvent en selle de cheval simple. Exemple : kiosque à musique à Kassel, Allemagne (Frei Otto arch., 1955).



Membrane à câbles de vallée. Exemple : pavillon Tanzbrunnen à Cologne, Allemagne (Frei Otto arch., 1957)



Membrane à arceaux (mont). Exemple : laboratoire de recherche à Venafro, Italie (Samyn and Partners arch., 1989 - 1991).



Membrane à point haut (mât). Exemple : club diplomatique de Riyad, Arabie Saoudite (Frei Otto arch., 1980).